KTH Matematik

Lösningsförslag till Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I.

Onsdagen den 13 juni 2012, kl 1330-1430.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.
Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $xyy = y^2 \quad x^2, x > 0, y(1) = \quad \sqrt{2}$.
Ange även dess existensintervall.
……………………………………………………………….………

Lösningsförslag:
Den givna differentialekvationen är Bernoullsk.

Vi sätter $z = y^2, z = 2yy$. Insättning ger $x\frac{z}{2} = z \quad x^2$.

En linjär differentialekvation av första ordningen har erhållits.

Den omformas till normalform $z \quad \frac{2}{x}z = \quad 2x$.

Bestäm en integrerande faktor: $e^{\frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^{2}$

Multiplicera differentialekvationen med x^{2}: $x^{2}z \quad 2x^{3}z = \quad 2x^{1}$, $(x^{2}z)z = \quad 2x^{1}$.

Integrera med avseende på x: $x^{2}z = C \quad 2\ln x$, $x^{2}y^2 = C \quad 2\ln x$.

Villkoret ger: $C = 2$. $y^2 = 2x^2(1 \quad \ln x)$.

Den sökta lösningen är $y = \quad x\sqrt{2(1 \quad \ln x)}$.

Lösningens existensintervall ges av $\{x : 0 < x < e\}$.

SVAR: $y = \quad x\sqrt{2(1 \quad \ln x)}$ och dess existensintervall är $\{x : 0 < x < e\}$.

Modul 2. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 2x \quad 2y \\ x \end{matrix}$.

Lösningsförslag:
Kolonnerna i en fundamentalmatris består av de linjärt oberoende lösningarna till systemet.
Lösningarna bestämmes med hjälp av egenvärden och tillhörande egenvektor.
Egenvärdena bestämmes ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})$.

Vi omformar systemet $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ och vi får $\mathbf{A} = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}$.

Nu över till egenvärdena $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} = {}^2 + 2 \quad + 2 = (\quad + 1)^2 + 1$.

Egenvärdena är komplexa och lika med $= \quad 1 \pm i$.
Vid komplexa egenvärden behöver endast en egenvektor bestämmas.
Vi väljer ett komplex egenvärde. Tag $= \quad 1 + i$.

Motsvarande egenvektor erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})K = \mathbf{0}$.

Vi får $\begin{matrix} 2 & (\ 1+i) & 2 \\ 1 & & (1+i) \end{matrix} \ \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\begin{matrix} 1 \quad i & 2 \\ 1 & 1 \quad i \end{matrix} \ \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K} = \begin{matrix} 1 \quad i \\ \square 1 \end{matrix}$.

En komplex lösning till systemet har formen $\mathbf{Z} = e^{(\ 1+i)t} \begin{matrix} 1 \quad i \\ \square 1 \end{matrix}$.

För att erhålla två linjärt oberoende lösningar tar vi realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen.

$$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = \operatorname{Re} \ e^{\ t}(\cos t + i\sin t) \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} + i \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = e^{\ t} \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \cos t + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \sin t = e^{\ t} \begin{matrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = \operatorname{Im} \ e^{\ t}(\cos t + i\sin t) \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} + i \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \cos t + \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \sin t = e^{\ t} \begin{matrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{matrix}$$

En fundamentalmatris är $= \begin{matrix} e^{\ t}(\cos t + \sin t) & e^{\ t}(\ \cos t + \sin t) \\ e^{\ t}\cos t & e^{\ t}\sin t \end{matrix}$.

SVAR: En fundamentalmatris är $= \begin{matrix} e^{\ t}(\cos t + \sin t) & e^{\ t}(\ \cos t + \sin t) \\ e^{\ t}\cos t & e^{\ t}\sin t \end{matrix}$.

<u>Modul 3</u>. Bestäm genom variabelseparation en lösning till den partiella differentialekvationen $u_x \quad u_y = u$ som uppfyller villkoret $u(x,0) = 4e^{2x} + 3e^{\ 5x}$

<u>Lösningsförslag:</u>

Sätt in $u(x,y) = X(x)Y(y)$ i $u_x \quad u_y = u$. Vi får $X\ (x)Y(y) \quad X(x)Y\ (y) = X(x)Y(y)$.

Dividera med $u(x,y) = X(x)Y(y)$: $\frac{X\ (x)}{X(x)} \quad \frac{Y\ (y)}{Y(y)} = 1$, $\frac{X\ (x)}{X(x)} = \frac{Y\ (y)}{Y(y)} + 1 = \text{konstant} =$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av kopplade differentialekvationer $\begin{matrix} X\ (x) = \quad X(x) \\ Y\ (y) = (\quad 1)Y(y) \end{matrix}$, vilket har lösningarna $\begin{matrix} X(x) = Ae^{\ x} \\ Y(y) = Be^{(\ \ 1)y} \end{matrix}$.

Lösningarna är på formen $u(x,y) = Ae^{\ x}Be^{(\ \ 1)y} = Ce^{\ x+(\ \ 1)y}$ och linjärkombinationer av dessa.

Villkoret $u(x,0) = 4e^{2x} + 3e^{\ 5x}$ ger att vi ansätter $u(x,y) = C_1 e^{\ _1 x + (\ _1\ 1)y} + C_2 e^{\ _2 x + (\ _2\ 1)y}$.

Vi får $u(x,0) = 4e^{2x} + 3e^{\ 5x} = C_1 e^{\ _1 x} + C_2 e^{\ _2 x}$ och $\begin{matrix} C_1 = 4, \square_1 = 2 \\ C_2 = 3, \square_2 = \quad 5 \end{matrix}$

Insättning av de bestämda konstanterna ger $u(x,y) = 4e^{2x+y} + 3e^{\ 5x\ \ 6y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 4e^{2x+y} + 3e^{\ 5x\ \ 6y}$.