Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633, Differentialekvationer I.

Tisdagen den 14 augusti 2012, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>
Befolkningen i ett litet samhälle växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningen.
Den ursprungliga befolkningen är 500 personer.
Efter 5 år är befolkningen 1000 personer.
Ställ upp tillhörande begynnelsevärdesproblem.
Hur stor är befolkningen efter 15 år ?
<u>Lösning:</u>
Låt $P(t)$ vara befolkningsmängden vid tiden t.

Vår modell representeras av begynnelsevärdesproblemet $\frac{dP(t)}{dt}=kP(t)$, $P(0)=500$, $P(5)=1000$

k är en proportionalitetskonstant.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $P(t)=Ae^{kt}$.

Villkoret $P(0)=500$ ger $A=500$ och $P(t)=500e^{kt}$.

Villkoret $P(5)=1000$ ger $1000=500e^{5t}$, $2=e^{5t}, t=\frac{1}{5}\ln 2$.

Befolkningsmängden vid en godtycklig tidpunkt t ges av $P(t)=500e^{t\frac{1}{5}\ln 2}=500e^{\ln 2\frac{t}{5}}=500\ 2^{\frac{t}{5}}$.

Efter 15 år är befolkningsmängden $P(15)=500\ 2^{\frac{15}{5}}=500\ 2^{3}=4000$.

SVAR: Efter 15 år är befolkningsmängden 4000 personer.

<u>Modul 2.</u>

Antag att en partikels rörelse styrs av systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vad händer med en partikel placerad i punkten $(2,3)$ efter lång tid.
Bestäm vidare den allmänna lösningen till systemet.
<u>Lösning:</u>
Bestäm först matrisens egenvärden.

De erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ där $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vi får $0=\begin{vmatrix} -2-\lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+10=(\lambda+1)^2+9$. Egenvärden är $\lambda=-1\pm 3i$.

En partikel placerad i punkten $(2,3)$ hamnar efter lång tid i origo ty realdelen av egenvärdet är negativt.
Den allmänna lösningen är en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar.
Vi börjar med att bestämma en komplex lösning och då behövs även en egenvektor.
Vi tar egenvärdet $\lambda=-1+3i$ och sätter in det i ekvationen $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} -2-(-1+3i) & -10 \\ 1 & 0-(-1+3i) \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0},\ \begin{pmatrix} -1-3i & -10 \\ 1 & 1-3i \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0},\ \mathbf{K}=\begin{pmatrix} 1-3i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning är $\mathbf{Z}=e^{(-1+3i)t}\begin{pmatrix} 1-3i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Real- och imaginärdel av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.
Vi omformar den komplexa lösningen.

$$\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\cos 3t + i\sin 3t\right)\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\cos 3t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - i^2\sin 3t\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + i\left(-\cos 3t\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \sin 3t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\mathbf{Z} = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 3t + 3\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix}-3\cos 3t + \sin 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 3t + 3\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{-t}\begin{pmatrix}-3\cos 3t + \sin 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 3t + 3\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-3\cos 3t + \sin 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix}.$$

SVAR En partikel placerad i punkten $(2,3)$ hamnar efter lång tid i origo.
Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 3t + 3\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-3\cos 3t + \sin 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix}.$$

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $y(t)$ då $y'' + 2y' + 10y = 10U(t-4)$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$.
$U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar differentialekvationen och sätter in villkoren.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 10Y(s) = \frac{10e^{-4s}}{s}$$

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = s\ 1 + 2 + 2(1) + \frac{10e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+10} + \frac{10e^{-4s}}{s(s^2+2s+10)} = \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+9} + \left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+10}\right)e^{-4s}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+9} + \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1+\frac{1}{3}3}{(s+1)^2+9}\right)e^{-4s}$$

Återtransformera.

$$y(t) = e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) + U(t-4)\left(1 - e^{-(t-4)}\left(\cos 3(t-4) + \frac{1}{3}\sin 3(t-4)\right)\right).$$

SVAR: Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av

$$y(t) = e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) + U(t-4)\left(1 - e^{-(t-4)}\left(\cos 3(t-4) + \frac{1}{3}\sin 3(t-4)\right)\right).$$

<u>Del 2</u>

11. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c. Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.

<u>Lösning:</u>

Vi börjar med modellerna.

Modell 1: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a \quad , \frac{dP}{dt} = aP.$

Modell 2: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP \ , \ \frac{dP}{dt} = P(a + bP) \quad , b < 0.$

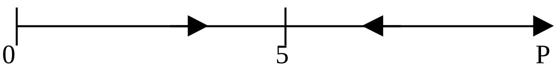
Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(a + bP) - c.$

Nu över till analysen och med de numeriska värdena på konstanterna a, b och c.

<u>Modell 1:</u> $\frac{dP}{dt} = 5P > 0$ då $P > 0$. P växer obegränsat då t växer.

<u>Modell 2:</u> $\frac{dP}{dt} = P(5 - P)$. Det finns två stationära lösningar: $P = 0$ och $P = 5$.

Studera faslinjen.

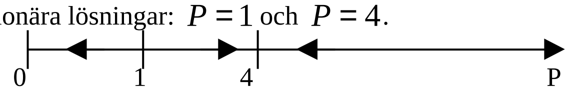


$P = 5$ är en asymptotiskt stabil lösning. Efter lång tid kommer blir $P = 5$.

<u>Modell 3:</u> $\frac{dP}{dt} = P(5 - P) - 4 = 5P - P^2 - 4 = (P - 1)(4 - P)$.

Det finns två stationära lösningar: $P = 1$ och $P = 4$.

Studera faslinjen.



Efter lång tid blir $P : 0$ då $P < 1$, 1 då $P = 1$ och 4 då $1 < P$.

SVAR: Modell 1: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a \quad , \frac{dP}{dt} = aP.$ P växer obegränsat då t växer.

Modell 2: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP \ , \ \frac{dP}{dt} = P(a + bP) \quad , b < 0$. Efter lång tid kommer blir $P = 5$.

Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(a + bP) - c$. Efter lång tid blir $P : 0$ då $P < 1$, 1 då $P = 1$ och 4 då $1 < P$.

12. $y_1(x) = 2x, \ y_2(x) = x - 3x^2, \ y_3(x) = 3x - 4x^2$ och $y_4(x) = 6x - 7x^2$ är ett antal lösningar till en homogen differentialekvationen på formen $x^2y'' + axy' + by = 0, \ x > 0$. Vidare är $y_p = x\ln x$ en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x), \ x > 0$.

Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

Ange även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$.

<u>Lösning:</u>

För att bestämma den allmänna lösningen till en linjär differentialekvation av ordning två behövs två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen och en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena ät $y_I(x) = x$ och $y_{II}(x) = x^2$.

Den allmänna lösningen till $x^2y'' + axy' + by = f(x), \ x > 0$ ges av $y = Ax + Bx^2 + x\ln x$.

Vi behöver förstaderivatan: $y' = A + 2Bx + \ln x + 1$.

Villkoren $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$ ger $\begin{cases} 4 = y(1) = A + B \\ 6 = y'(1) = A + 2B + 1 \end{cases} \begin{cases} 4 = A + B \\ 5 = A + 2B \end{cases} \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases}.$

Den sökta lösningen är $y = 3x + x^2 + x\ln x$.

Nu över till att bestämma differentialekvationen.

$y_I(x) = x$ och $y_{II}(x) = x^2$ sättes in i $x^2y'' + axy' + by = 0$,

$$\begin{cases} x^2 0 + ax1 + bx = 0 \\ x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} a + b = 0 \\ 2 + 2a + b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Den homogena differentialekvationen blir $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

Insättning av $y_p = x\ln x$ i den inhomogena differentialekvationen ger

$$f(x) = x^2 \frac{1}{x} - 2x(\ln x + 1) + 2x\ln x = -x \ .$$

Den sökta inhomogena differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.

SVAR Den sökta differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.
Den sökta lösningen är $y = 3x + x^2 + x\ln x$.

13. Bestäm om möjligt produktlösningar $u(x,y) = X(x)Y(y)$ till
den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

<u>Lösning:</u>
Vi använder oss av variabelseparation. Sätt $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Insättning i den givna differentialekvationen(Laplaceekvation) ger: $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$.
Utför division med $X(x)Y(y)$ och separera variablerna: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konstant} = \lambda \in R$.

Vi erhåller systemet: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$. De tre fallen $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$ undersökes.

<u>$\lambda = \mu^2 > 0$, $\mu \in R$</u>

$\begin{cases} X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{\mu x} \\ Y(y) = C_1 \cos\mu y + D_1 \sin\mu y \end{cases}$ $\quad u(x,y) = (A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{\mu x})(C_1\cos\mu y + D_1 \sin\mu y)$

<u>$\lambda = 0$</u>

$\begin{cases} X(x) = A_2 x + B_2 \\ Y(y) = C_2 y + D_2 \end{cases}$ $\quad u(x,y) = (A_2 x + B_2)(C_2 y + D_2)$

<u>$\lambda = -\mu^2 < 0$, $\mu \in R$</u>

$\begin{cases} X(x) = A_3 \cos\mu x + B_3 \sin\mu x \\ Y(y) = C_3 e^{\mu y} + D_3 e^{-\mu y} \end{cases}$ $\quad u(x,y) = (A_3\cos\mu x + B_3 \sin\mu x)(C_3 e^{\mu y} + D_3 e^{-\mu y})$

<u>SVAR:</u> Vi erhåller följande produktlösningar:

<u>$\lambda = \mu^2 > 0$, $\mu \in R$</u> $\quad u(x,y) = (A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{\mu x})(C_1\cos\mu y + D_1\sin\mu y)$
<u>$\lambda = 0$</u> $\quad u(x,y) = (A_2 x + B_2)(C_2 y + D_2)$
<u>$\lambda = -\mu^2 < 0$, $\mu \in R$</u> $\quad u(x,y) = (A_3\cos\mu x + B_3\sin\mu x)(C_3 e^{\mu y} + D_3 e^{-\mu y})$

14.a) Definiera begreppet fundamentalmatris för ett linjärt system av differentialekvationer..
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$
<u>Lösning:</u>
a) En fundamentalmatris består av linjärt oberoende kolonner, vilka är lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Antalet kolonner är lika med ordningen hos den kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$.
b) Den givna fundamentalmatrisen Φ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, dvs $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Härur kan den konstanta matrisen $\mathbf{A}$. Multiplicera $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ från höger med inversen till fundamentalmatrisen Φ.
Då erhålles $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$, där Φ^{-1} är invers till fundamentalmatrisen Φ .
c) För att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ använder vi variation av parametrar och ansätter en partikulärlösning på formen $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}(t)$.
Insättning i det inhomogena systemet ger: $(\Phi\mathbf{U}(t))' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$

Derivera: $\Phi'\mathbf{U}(t)+\Phi\mathbf{U}'(t)=\mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t)+\mathbf{F}$.
Omforma: $(\Phi'-\mathbf{A}\Phi)\mathbf{U}(t)+\Phi\mathbf{U}'(t)=\mathbf{F}$.
Fundamentalmatrisens kolonner är lösningar till det homogena systemet vilket innebär att $\Phi'-\mathbf{A}\Phi=\mathbf{0}$.
Vi får då $\Phi\mathbf{U}'(t)=\mathbf{F}$. Multiplicera från vänster med fundamentalmatrisens invers Φ^{-1}.
Det ger $\mathbf{U}'(t)=\Phi^{-1}\mathbf{F}$. Integrera med avseende på t: $\mathbf{U}(t)=\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$.
Vår sökta partikulärlösning är $\mathbf{X}_p=\Phi\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$.
SVAR: a) Se ovan, b) $\mathbf{A}=\Phi'\Phi^{-1}$, c) $\mathbf{X}_p=\Phi\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$.

15. Låt $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,L]$.
De kontinuerliga funktionerna f och g kan utvecklas i denna följd på intervallet $[0,L]$.
f har utvecklingen $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Phi_n(x)$ och g har utvecklingen $\sum_{m=1}^{\infty}b_m\Phi_m(x)$,
Bestäm koefficienterna a_n och b_m.
Härled ett uttryck för integralen $\int_0^L f(x)g(x)dx$ med hjälp av koefficienterna a_n och b_m.

<u>Lösning:</u>

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Phi_n(x)=a_1\Phi_1(x)+a_2\Phi_2(x)+\ldots+a_n\Phi_n(x)+\ldots..$$

Multiplicera ekvationen med $\Phi_m(x)$ och integrera över intervallet $[0,L]$.

$$\int_0^L f(x)\Phi_m(x)dx=a_1\int_0^L\Phi_1(x)\Phi_m(x)dx+a_2\int_0^L\Phi_2(x)\Phi_m(x)dx+\ldots+a_n\int_0^L\Phi_n(x)\Phi_m(x)dx+\ldots$$

Eftersom den givna funktionsföljden är ortogonal blir varje integral på höger sida lika med noll utom då $n=m$.

Ekvationen blir då $\int_0^L f(x)\Phi_m(x)dx=a_m\int_0^L\Phi_m(x)\Phi_m(x)dx$, dvs $a_m=\dfrac{\int_0^L f(x)\Phi_m(x)dx}{\int_0^L\Phi_m(x)\Phi_m(x)dx}$.

Analogt erhålles att $b_m=\dfrac{\int_0^L g(x)\Phi_m(x)dx}{\int_0^L\Phi_m(x)\Phi_m(x)dx}$.

Nu över till $\int_0^L f(x)g(x)dx$. Sätt in utvecklingarna av f och g i integralen.

Vi får

$$\int_0^L f(x)g(x)dx=\int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Phi_n(x)\sum_{m=1}^{\infty}b_m\Phi_m(x)dx=\int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Phi_n(x)(b_1\Phi_1(x)+b_2\Phi_2(x)+\ldots+b_m\Phi_m(x)+\ldots..)dx$$

$$\int_0^L f(x)g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^L\Phi_n(x)(b_1\Phi_1(x)+b_2\Phi_2(x)+\ldots+b_m\Phi_m(x)+\ldots..)dx$$

Eftersom den givna funktionsföljden är ortogonal blir varje integral på höger sida lika med noll utom då $n=m$.

Vi får $\int_0^L f(x)g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^L\Phi_n(x)b_n\Phi_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\int_0^L\Phi_n(x)\Phi_n(x)dx$

SVAR: $a_m = \dfrac{\int_0^L f(x)\Phi_m(x)dx}{\int_0^L \Phi_m(x)\Phi_m(x)dx}$, $b_m = \dfrac{\int_0^L g(x)\Phi_m(x)dx}{\int_0^L \Phi_m(x)\Phi_m(x)dx}$, $\int_0^L f(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \int_0^L \Phi_n(x)\Phi_n(x)dx$.