Tentamensskrivning i SF1633, Differentialekvationer I.
Tisdagen den 14 augusti 2012, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

Befolkningen i ett litet samhälle växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningen.
Den ursprungliga befolkningen är 500 personer.
Efter 5 år är befolkningen 1000 personer.
Ställ upp tillhörande begynnelsevärdesproblem.
Hur stor är befolkningen efter 15 år ?

Modul 2.

Antag att en partikels rörelse styrs av systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vad händer med en partikel placerad i punkten $(2,3)$ efter lång tid.
Bestäm vidare den allmänna lösningen till systemet.

Modul 3.

Bestäm $y(t)$ då $y'' + 2y' + 10y = 10U(t-4)$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$.
$U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

Del 2

11. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a , och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b .
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c . Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.

12. $y_1(x) = 2x$, $y_2(x) = x - 3x^2$, $y_3(x) = 3x - 4x^2$ och $y_4(x) = 6x - 7x^2$ är ett antal lösningar till en homogen differentialekvationen på formen $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$. Vidare är $y_p = x\ln x$ en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.
Ange även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$.

13. Bestäm om möjligt produktlösningar $u(x,y) = X(x)Y(y)$ till
den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

14.a) Definiera begreppet fundamentalmatris för ett linjärt system av differentialekvationer..
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$

15. Låt $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av ortogonala funktioner på intervallet $[0, L]$.
De kontinuerliga funktionerna f och g kan utvecklas i denna följd på intervallet $[0, L]$.
f har utvecklingen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ och g har utvecklingen $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \Phi_m(x)$,
Bestäm koefficienterna a_n och b_m.
Härled ett uttryck för integralen $\int_0^L f(x)g(x)dx$ med hjälp av koefficienterna a_n och b_m.