Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Måndagen den 15 oktober 2012, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$ som uppfyller villkoret $y(0) = 9$.
Ange även lösningens existensintervall.

<u>Modul 2.</u>

Studera det icke-linjära systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x^2 + \dfrac{3}{2})y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + 4y - 1 \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $y(\dfrac{3\pi}{2})$ och $y(\dfrac{\pi}{2})$ då $y'' - 2y' + 2y = 3\delta(t - \pi)$ och $y(0) = y'(0) = 0$.

<u>Del 2</u>

11. En tank som rymmer 20 liter innehåller från början 15 liter rent vatten. Vid tiden $t = 0$ pumpas en lösning in med hastigheten 5 liter/min med koncentrationen 10 gram/liter.
Samtidigt vid $t = 0$ öppnas en kran så att utflödet av tankens innehåll blir proportionellt, med proportionalitetskonstanten k, mot lösningens volym i tanken.
a) Ställ upp en differentialekvation som modellerar mängden salt i tanken som funktion av tiden.
b) Bestäm $\lim\limits_{t \to \infty} A(t)$, där $A(t)$ är mängden salt i tanken vid tiden t, uttryckt i proportionalitetskonstanten k.
c) Bestäm proportionalitetskonstanten k om man vet att $A(1) = \dfrac{25}{k}$ gram.

12.a) Definiera begreppet fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning två.
b) Till en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter har följande lösningar föreslagits: $y_1 = 3e^{-x} + 5e^{4x}$, $y_2 = 7e^{x^2}$, $y_3 = 4e^{-x} - 9e^{4x}$, $y_4 = 7\left(e^{2x}\right)^2$
Kommentera detta förslag samt bestäm en fundamentalmängd av lösningar.
c) Betrakta en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter som svarar mot fundamentalmängden av lösningar i b) och med koefficienten framför andraderivatan lika med ett.
Bestäm den allmänna lösningen till motsvarande inhomogena differentialekvation, då dess högerled är $g(x) = 25e^{4x}$.

vgv

13. a. Definiera begreppet fundamentalmatris för systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
b. Härled en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.

c. Bestäm en partikulärlösning till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix}$, då $0 < t < \pi$.

14 Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av u(x,t).
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0°C$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden t = 0 är stavens temperatur $u(x,0) = 4\cos 3x - 4\cos 7x$.
Detta ger upphov till följande problem:

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}\ ,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\ , t > 0 \\ u'_x(0,t) = u(\dfrac{\pi}{2}, t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 4\cos 3x - 4\cos 7x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

15. För att exempelvis modellera bindningars vibrationer i molekyler används följande förenklade modell, $-\dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2\Psi = \dfrac{1}{2}\Psi$.

a) Visa att differentialekvationen $y'' + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right)y = 0$ kan skrivas som $\dfrac{d}{dx}\left[\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{2}\right)\right] = \dfrac{x}{2}\left[\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{2}\right)\right]$.

Notera att $\dfrac{d}{dx}(f + g) = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{dg}{dx}$.

b) Lös $y'' + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right)y = 0$ genom att sätta $f(x) = \left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{2}\right)$ i ekvationen

$\dfrac{d}{dx}\left[\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{2}\right)\right] = \dfrac{x}{2}\left[\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{2}\right)\right]$ och sedan bestämma $f(x)$. Svaret $y(x)$ får innehålla en integral.