Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Måndagen den 12 november 2012, kl 17.30-19.00.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.
Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 250 °C.
För avsvalningsprocessen föreslås två matematiska modeller.
Modell 1: $\frac{dT}{dt}=\frac{1}{4}(T-40)$. Modell 2: $\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{5}(T-30)$. T är produktens temperatur vid tiden t.
Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.
Bestäm även produktens temperatur efter lång tid.
Lösning:
Modell 1: För $T>40$ är $\frac{dT}{dt}>0$ och temperaturen växer. Således ingen avsvalningsprocess.
Modell 2: För $T>30$ är $\frac{dT}{dt}<0$ och temperaturen avtar. Således en avsvalningsprocess.
$\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{5}(T-30)$ är linjär av första ordningen.
Den kan lösas med hjälp av integrerande faktor men även som linjär med konstanta koefficienter.
Vi väljer det senare alternativet.
Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $T(t)=Ae^{-\frac{t}{5}}+30$. Vid starten är produktens temperatur 250 °C.
$250=T(0)=A+30$, $A=220$.

Produktens temperatur vid en godtycklig tidpunkt t är $T(t)=220e^{-\frac{t}{5}}+30$.
Efter lång tid har produkten temperaturen 30°C.

SVAR: Modell 2 är en avsvalningsprocess. Produktens temperatur är $T(t)=220e^{-\frac{t}{5}}+30$.
Efter lång tid har produkten temperaturen 30°C.

Modul 2.
$y_1=t$ är en lösning till differentialekvationen $t^2y''-5ty'+5y=0$, $t>0$.
Bestäm den allmänna lösningen $y(t)$ till den inhomogena differentialekvationen
$t^2y''-5ty'+5y=-3t^2$, $t>0$. Verifiera även att $y(t)$ satisfierar den inhomogena differentialekvationen $t^2y''-5ty'+5y=-3t^2$, $t>0$
Lösning:
Vi använder reduktion av ordning. Sätt $y(t)=tz(t)$. Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger: $t^2\left(tz''+2z'\right)-5t\left(tz'+z\right)+5tz=-3t^2$.
Förenkla: $t^3z''-3t^2z'=-3t^2$. Sänk ordningen. Sätt $u=z'$, $u'=z''$.
Vi får $u'-3t^{-1}u=-3t^{-1}$ vilken är linjär av första ordningen.
Multiplicera med en integrerande faktor t^{-3}: $t^{-3}u'-3t^{-4}u=-3t^{-4}$, $(t^{-3}u)'=-3t^{-4}$.
Integrera med avseende på t : $t^{-3}u=t^{-3}+C_1$, $u=1+C_1t^3=z'$.
Integrera med avseende på t : $z=t+\frac{C_1}{4}t^4+C_2=t+C_3t^4+C_2$. $y(t)=tz(t)=t^2+C_3t^5+C_2t$.
Insättning i vänstra ledet i den inhomogena differentialekvationen ger:
$t^2\left(2+20C_3t^3\right)-5t\left(2t+5C_3t^4+C_2\right)+5\left(t^2+C_3t^5+C_2t\right)=$

$t^2(2-10+5)+C_3(20t^5-25t^5+5t^5)+C_2(-5t+5t)=-3t^2$
Vi har erhållit högra ledet i den inhomogena differentialekvationen. VSV.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y(t)=tz(t)=t^2+C_3t^5+C_2t$.

Modul 3.

Bestäm $u(0,t)$ då $u'_x(x,t) = 3u(x,t) + u'_t(x,t)$ och $u(x,0) = 5e^{2x} + 4e^{-x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X'(x)T(t) = 3X(x)T(t) + X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X'(x)}{X(x)} = 3 + \dfrac{T'(t)}{T(t)}$. Derivera med avseende på x.

Vi får $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{X'(x)}{X(x)}\right) = 0$. Detta innebär att vänstra ledet och högra ledet är konstant.

$\dfrac{X'(x)}{X(x)} = 3 + \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$ = konstant

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ T'(t) = (\lambda - 3)T(t) \end{cases}$$

Vi skriver upp dess lösning: $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ T(t) = Be^{(\lambda-3)t} \end{cases}$.

Insättning i $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $u(x,t) = Ae^{\lambda x}Be^{(\lambda-3)t} = Ce^{\lambda x + (\lambda-3)t}$.

Även linjärkombinationer av dessa lösningar är lösning till differentialekvationen.

Villkoret $u(x,0) = 5e^{2x} + 4e^{-x}$ ger att det behövs två lösningar av ovanstående form.

Vi skriver $u(x,t) = C_1e^{\lambda_1 x + (\lambda_1 - 3)t} + C_2e^{\lambda_2 x + (\lambda_2 - 3)t}$.

Villkoret $u(x,0) = 5e^{2x} + 4e^{-x}$ ger $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = u(x,0) = 5e^{2x} + 4e^{-x}$.

Vi får $C_1 = 5$, $\lambda_1 = 2$, $C_2 = 4$, $\lambda_2 = -1$.

Insättning ger $u(x,t) = 5e^{2x-t} + 4e^{-x-4t}$ och $u(0,t) = 5e^{-t} + 4e^{-4t}$.

SVAR: $u(0,t) = 5e^{-t} + 4e^{-4t}$