Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Tisdagen den 8 januari 2013, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1

Modul 1.

Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - 3y}{3}$.

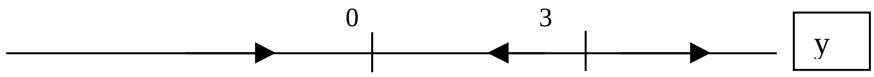
För vilka startvärden $y_0 = y(0)$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ ändligt ?

Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = 4$ samt ange dess existensintervall.

Lösning:

Vi bestämmer först de stationära lösningarna. De erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi får: $y_1 = 0$, $y_2 = 3$. För att undersöka gränsvärdet studerar vi derivatans tecken.

Nu över till det endimensionella fasporträttet.



Gränsvärdet $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ är ändligt för startvärden $y_0 = y(0) \le 3$.

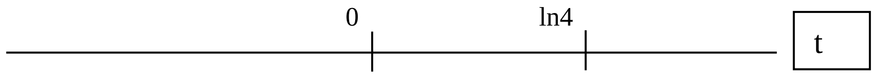
Nu över till den separabla differentialekvationen. (Den är även Bernoullsk.)
Konstantlösningarna uppfyller ej villkoret. Vi omformar differentialekvationen och partialbråksuppdelar.

$$\frac{3}{y(y-3)}\frac{dy}{dt} = 1 \;,\; \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-3}\right)\frac{dy}{dt} = 1$$

Integration med avseende på t ger: $-\ln|y| + \ln|y-3| = t + \ln|C_1|$.

Lös ut y. Vi får $\ln\left|\dfrac{y-3}{y}\right| = t + \ln|C_1|$, $\dfrac{y-3}{y} = \pm C_1 e^t = Ce^t$, $y = \dfrac{3}{1 - Ce^t}$.

Villkoret $y(0) = 4$ ger $C = \dfrac{4-3}{4} = \dfrac{1}{4}$. $y = \dfrac{12}{4 - e^t}$.



Existensintervallet är $\{t : t < \ln 4\}$.

SVAR: Gränsvärdet $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ ändligt för startvärden $y_0 = y(0) \le 3$.

Den sökta lösningen är $y = \dfrac{12}{4 - e^t}$ och dess existensintervallet är $\{t : t < \ln 4\}$.

Modul 2.

Betrakta det linjära systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Den kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$ uppfyller följande likheter: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \end{pmatrix}$.

Bestäm systemets allmänna lösning samt bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{X}(t)$ då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi bestämmer matrisen $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.

$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\44\end{pmatrix}$ kan skrivas som $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ respektive $\mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$.

Härur kan direkt avläsas att $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.

Vi får $\lambda_1 = 9$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = -4$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$

Systemets allmänna lösning kan skrivas $\mathbf{X} = c_1 e^{9t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$.

Vi bestämmer den lösning som uppfyller villkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}-4\\22\end{pmatrix}$.

$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}-4\\22\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$ ger $c_1 = 0$, $c_2 = -2$. Vilket ger $\mathbf{X} = -2e^{-4t}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix}-4\\22\end{pmatrix}$.

Det sökta gränsvärdet är $\lim_{t\to\infty}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$.

Det kan även inses genom att startpunkten ligger på egenvektorn hörande till det negativa egenvärdet.

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1 e^{9t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$. Det sökta gränsvärdet är $\lim_{t\to\infty}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$.

<u>Modul 3.</u>

Funktionen $f(x) = 3+2x$, $0 < x < 5$ kan utvecklas i en cosinusserie, en sinusserie och en fourierserie.
Bestäm vad respektive serie konvergerar mot för $x = 5$.

<u>Lösning:</u>

Eftersom funktionen och dess derivata är kontinuerliga (Det räcker med styckvis kontinuerliga,)
på intervallet så konvergerar serien mot medelvärdet i den aktuella punkten.
För cosinusserie skall en jämn funktion betraktas.

Cosinusserien konvergerar mot $\dfrac{f(5^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{f(-5^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$.

För sinusserie skall en udda funktion betraktas.

Sinusserien konvergerar mot $\dfrac{f(5^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{f(-5^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{-13+13}{2} = 0$.

Foirierserien konvergerar mot $\dfrac{f(5^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{f(0^+)+f(5^-)}{2} = \dfrac{3+13}{2} = 8$.

SVAR: Cosinusserien konvergerar mot 13.
Sinusserien konvergerar mot 0.
Foirierserien konvergerar mot 8.

<u>Del 2</u>

11.a. Ange det största intervall i vilket lösningen till $y' = 3x^2(y^2+1)$, $y(0) = 1$ existerar.
Är lösningen entydig ?
Är följande påståenden sanna eller falska.
b. Låt $y = f(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = y^2 + 9$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.
c. $y = x^5$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = 5y^{4/5}$, $y(0) = 0$. Lösningen är entydig.

<u>Lösning:</u>

a. Den givna differentialekvationen är separabel. Den saknar reella konstantlösningar.

Vi omformar ekvationen: $\dfrac{y'}{y^2+1} = 3x^2$. Integration med avseende på x ger $\arctan y = x^3 + C$.

Villkoret ger $C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Vi får $\arctan y = x^3 + \frac{\pi}{4}$. Men $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$.

Detta ger oss följande olikheter $-\frac{\pi}{2} < x^3 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Omforma $-\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x^3 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ eller $-\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$

Det största intervallet är $\left\{ x : -\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right\}$.

Vi har att både $f(x,y) = 3x^2(y^2+1)$ och $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 2y$ är kontinuerliga.

Då är lösningen entydig.

b. Falskt, ty derivatan är större än noll.

c. Falskt, ty vi finner två lösningar. Det är $y = x^5$ och $y = 0$.

SVAR: a. Det största intervallet är $\left\{ x : -\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right\}$. Lösningen entydig.

b. Falskt.
c. Falskt.

12.a. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till differentialekvationen $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.
Hur undersöker man om y_1 och y_2 är linjärt oberoende ?

b. Visa att Wronskianen $W(y_1, y_2)$ till y_1 och y_2 satisfierar differentialekvationen $\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

c. Härled Abels formel $W = Ce^{-\int a_1(x)dx}$.

<u>Lösning:</u>

a. Man undersöker Wronskianen $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Om den är skilt ifrån noll är lösningarna linjärt oberoende.

b. Wronskianen $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Insättning i vänstra ledet av ekvationen ger $\mathrm{VL} = a_2(x)(y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'') + a_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$.

Vi omformar så att den givna differentialekvatonen, $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, kan användas.

$$\mathrm{VL} = a_2(x)(y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'') + a_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$$
$$\mathrm{VL} = y_1(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2') - y_2(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1')$$

Vi adderar och subtraherar $y_1 a_0(x) y_2$.

$$\mathrm{VL} = y_1(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) - y_2(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)$$

Men y_1 och y_2 är två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Vi får då $\mathrm{VL} = y_1 0 - y_2 0 = 0 = \mathrm{HL}$.

c. Differentialekvationen $a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$ är linjär (Även separabel.)

Vi bestämmer en integrerande faktor. Först omformas differentialekvationen: $\frac{dW}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0 \quad , a_2(x) \neq 0$.

En integrerande faktor är $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$. Multiplicera $\frac{dW}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0$ med $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$.

Vi erhåller $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\frac{dW}{dx} + e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0$ vilket kan skrivas $\frac{d}{dx}\left\{ We^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \right\} = 0$.

Integrera med avseende på x: $We^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} = C$ vilket ger Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$.

SVAR: För a, b och c se ovan.

13.a. Definiera Heavisides stegfunktion $U(t-a)$ och bestäm därefter dess laplacetransform utgående från laplacetransformens definition.
b. Bestäm laplacetransformen till funktionen $f(t) = U(t-a)U(b-t)$ där $a < b$.
c. Bestäm laplacetransformen till funktionen $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}U(t-a)U(a+\varepsilon-t)$ där $\varepsilon > 0$.
Låt därefter $\varepsilon \to 0$ i laplacetransformen.
d. Bestäm $y(\frac{\pi}{2})$ då $y'' + 2y' + 5y = 2\delta(t-\frac{\pi}{4})$ och $y'(0) = y(0) = 0$.

<u>Lösning:</u>

a. Heavisides stegfunktion $U(t-a) = \begin{cases} 1 & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$.

Laplacetransformen för en funktion $f(t)$ ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.

För Heavisides stegfunktion får vi

$$L\{U(t-a)\} = \int_0^\infty U(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty 1e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \{s > 0\} = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

b. Då $U(t-a) = \begin{cases} 1 & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$ och $U(b-t) = \begin{cases} 1 & , b > t \\ 0 & , b < t \end{cases}$ följer att

$$f(t) = U(t-a)U(b-t) = \begin{cases} 1 & , a < t < b \\ 0 & , \text{f.ö.} \end{cases}.$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty U(t-a)U(b-t)e^{-st}dt = \int_a^b e^{-st}dt = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}.$$

c. $L\{g_\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}U(t-a)U(a+\varepsilon-t)e^{-st}dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} e^{-st}dt = \frac{e^{-sa} - e^{-s(a+\varepsilon)}}{\varepsilon s}$

$$L\{g_\varepsilon(t)\} = \frac{e^{-sa}(1-e^{-s\varepsilon})}{\varepsilon s} = \frac{e^{-sa}(1-(1-s\varepsilon+O(\varepsilon^2)))}{\varepsilon s} = \frac{e^{-sa}(s\varepsilon - O(\varepsilon^2))}{\varepsilon s} = e^{-sa}(1-O(\varepsilon)).$$

Här har vi MacLaurinutvecklat exponentialfunktionen.
Låt $\varepsilon \to 0$ i $L\{g_\varepsilon(t)\} = e^{-sa}(1-O(\varepsilon))$.
Då erhålles $\lim_{\varepsilon \to 0} L\{g_\varepsilon(t)\} = e^{-sa}$ vilket är laplacetransformen av Diracs deltafunktion.

d. Laplacetransformera $y'' + 2y' + 5y = 2\delta(t-\frac{\pi}{4})$.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 2e^{-s\frac{\pi}{4}}$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = 2e^{-s\frac{\pi}{4}}$$

$$Y(s) = \frac{2e^{-s\frac{\pi}{4}}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2e^{-s\frac{\pi}{4}}}{(s+1)^2 + 4}$$

Då den inversa laplacetransformen av $Z(s) = \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$ ger $z(t) = e^{-t}\sin 2t$ blir

$$y(t) = U(t-\frac{\pi}{4})e^{-(t-\frac{\pi}{4})}\sin 2(t-\frac{\pi}{4})$$

Det sökta funktionsvärdet $y(\frac{\pi}{2})$ blir $y(\frac{\pi}{2}) = U(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})e^{-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\sin 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{4}}$

SVAR:

a. Heavisides stegfunktion $U(t-a) = \begin{cases} 1 & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$. $L\{U(t-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s}$.

b. $L\{U(t-a)U(b-t)\} = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$.

c. $L\{g_\varepsilon(t)\} = L\left\{\frac{1}{\varepsilon}U(t-a)U(a+\varepsilon-t)\right\} = \frac{e^{-sa} - e^{-s(a+\varepsilon)}}{\varepsilon s}$. $\lim_{\varepsilon\to 0} L\{g_\varepsilon(t)\} = e^{-sa}$.

d. $y(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$.

14. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0$ för alla reella värden på μ.

Lösning:

Skriv den givna differentialekvationen som ett system.

Inför en ny variabel y enligt $y = x'$. Vi erhåller systemet: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\mu(x^2-1)y - x \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer de kritiska punkterna. De erhålles då tangentvektorn är lika med nollvektorrn.

Vi erhåller endast en kritisk punkt: $y = 0 \quad , x = 0$ dvs origo.

För att undersöka stabiliteten linjariserar vi det icke-linjära systemet.

Linjariseringen sker med hjälp av Jacobimatrisen(funktionalmatrisen)

Jacobimatrisen blir $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu 2xy - 1 & -\mu(x^2-1) \end{pmatrix}$.

I den kritiska punkten får vi $\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

Bestäm matrisens egenvärden.

Den karakteristiska ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix}$ ger följande $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$.

Kvadratkomplettera: $(\lambda - \frac{\mu}{2})^2 = (\frac{\mu}{2})^2 - 1 = \frac{\mu^2-4}{4}$. Egenvärdena $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$.

Då $\mu^2 \geq 4$, dvs $\mu \geq 2$ eller $\mu \leq -2$ erhålles reella egenvärden.

För $\mu \leq -2$ är den kritiska punkten asymptotiskt stabil.

För $\mu \geq 2$ är den kritiska punkten instabil.

Då $\mu^2 < 4$ dvs $-2 < \mu < 2$ erhålles komplexa egenvärden.

För $\mu = \mathrm{Re}\lambda < 0$ är den kritiska punkten asymptotiskt stabil.

För $\mu = \mathrm{Re}\lambda > 0$ är den kritiska punkten instabil.

För $\mu = \mathrm{Re}\lambda = 0$ kan ingen slutsats dras från det linjariserade systemet.

Men för $\mu = \mathrm{Re}\lambda = 0$ blir det icke-linjära systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\mu(x^2-1)y - x \end{pmatrix}$ linjärt.

Vi erhåller i detta fall $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Denna matris har egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm i$. Den kritiska punkten är en center och därmed stabil.

SVAR: För $\mu \leq -2$ är den kritiska punkten asymptotiskt stabil.

För $\mu \geq 2$ är den kritiska punkten instabil.

$-2 < \mu < 2$

För $\mu = \mathrm{Re}\lambda < 0$ är den kritiska punkten asymptotiskt stabil.

För $\mu = \mathrm{Re}\,\lambda > 0$ är den kritiska punkten instabil.
För $\mu = \mathrm{Re}\,\lambda = 0$ är den kritiska punkten stabil.

15. Lös Laplaces ekvation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i rektangeln $0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < 1$ med randvärdena $u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = 0 \quad , u(x,1) = 1$.

Lösning:
Vi löser problemet med variabelseparationsmetoden.
Sätt: $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Insåttning i differentialekvationen ger: $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$.
Dividera med $X(x)Y(y)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konstant} = \lambda \;,\; \lambda \quad R$.
Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0 \,,\, \lambda = \mu^2 \;,\; \mu \quad R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0 \,,\, \lambda = -\mu^2 \;,\; \mu \quad \boldsymbol{R}$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Variabelseparationen och villkoren $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ ger $X(0)Y(y) = X(\pi)Y(y) = 0$.
Detta skall gälla för alla aktuella y. Ger att $X(0) = X(\pi) = 0$.

$\lambda > 0 \,,\, \lambda = \mu^2 \;,\; \mu \quad R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0 \,,\, \lambda = -\mu^2 \;,\; \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\begin{cases} 0 = X(0) = A_1 + B_1 \\ 0 = X(\pi) = A_1 e^{\mu\pi} + B_1 e^{-\mu\pi} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = B_2 \\ 0 = X(\pi) = A_2 \pi + B_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = A_3 \\ 0 = X(\pi) = A_3 \cos \mu\pi + B_3 \sin \mu\pi \end{cases}$
Endast den triviala lösningen.	Endast den triviala lösningen.	Detta system har icke-triviala lösningar då $\mu = n \;\;, n \quad N$. $X(x) = B_3 \sin nx$.

Vi erhåller icke-triviala lösningar endast då separationskonstanten $\lambda = -\mu^2, \; \mu \quad R$.

Systemet är då: $\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) - \mu^2 Y(y) = 0 \end{cases}$.

Nu över till "y-ekvationen". Den har lösningen: $Y(y) = Ce^{ny} + De^{-ny}$.
Villkoret $u(x,0) = 0$ och variabelseparationen ger: $X(x)Y(0) = 0$, vilket skall gälla för alla aktuella x.
Vi erhåller: $Y(0) = 0$. Detta ger oss: $0 = Y(0) = C + D \;,\; D = -C$. $Y(y) = C(e^{ny} - e^{-ny})$.

Superpositionsprincipen ger: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{ny} - e^{-ny}) \sin nx$.

Det återstår att bestämma a_n.

Det resterande villkoret $u(x,1) = 1$ ger: $1 = u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{n} - e^{-n}) \sin nx$.

Här är $a_n(e^n - e^{-n})$ fourierkoefficienterna för den udda funktion som på intervallet $(0,\pi)$ är lika med 1.

Vi erhåller: $a_n(e^n - e^{-n}) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1 \sin nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{1-\cos n\pi}{n}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{1-\cos \pi n}{n(e^n - e^{-n})}$.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos \pi n}{n(e^n - e^{-n})}(e^{ny} - e^{-ny}) \sin nx$$

SVAR: Den sökta lösningen är: $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos \pi n}{n(e^n - e^{-n})}(e^{ny} - e^{-ny}) \sin nx$.