Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Tisdagen den 8 januari 2013, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>
Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - 3y}{3}$.
För vilka startvärden $y_0 = y(0)$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ ändligt ?
Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = 4$ samt ange dess existensintervall.

<u>Modul 2.</u>
Betrakta det linjära systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Den kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$ uppfyller följande likheter: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \end{pmatrix}$.

Bestäm systemets allmänna lösning samt bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{X}(t)$ då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \end{pmatrix}$.

<u>Modul 3.</u>
Funktionen $f(x) = 3 + 2x$, $0 < x < 5$ kan utvecklas i en cosinusserie, en sinusserie och en fourierserie. Bestäm vad respektive serie konvergerar mot för $x = 5$.

<u>Del 2</u>
11.a. Ange det största intervall i vilket lösningen till $y' = 3x^2(y^2 + 1)$, $y(0) = 1$ existerar.
Är lösningen entydig ?

Är följande påståenden sanna eller falska.
b. Låt $y = f(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = y^2 + 9$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.
c. $y = x^5$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = 5y^{4/5}$, $y(0) = 0$. Lösningen är entydig.

12.a. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till differentialekvationen $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.
Hur undersöker man om y_1 och y_2 är linjärt oberoende ?

b. Visa att Wronskianen $W(y_1, y_2)$ till y_1 och y_2 satisfierar differentialekvationen $\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

c. Härled Abels formel $W = Ce^{-\int a_1(x)dx}$.

13.a. Definiera Heavisides stegfunktion $U(t-a)$ och bestäm därefter dess laplacetransform utgående från laplacetransformens definition.

b. Bestäm laplacetransformen till funktionen $f(t) = U(t-a)U(b-t)$ där $a < b$.

c. Bestäm laplacetransformen till funktionen $g_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}U(t-a)U(a+\varepsilon-t)$ där $\varepsilon > 0$.

Låt därefter $\varepsilon \to 0$ i laplacetransformen.

d. Bestäm $y(\frac{\pi}{2})$ då $y'' + 2y' + 5y = 2\delta(t - \frac{\pi}{4})$ och $y'(0) = y(0) = 0$.

14. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$ för alla reella värden på μ .

15. Lös Laplaces ekvation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i rektangeln $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$ med randvärdena $u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 1$.