Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I
Tisdagen den 5 februari 2013, kl 17.30-19.00.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Modul 1.</u>
En kaka tas ur ugnen. Efter 10 minuter är kakan 105°C och efter 30 minuter är kakan 65°C.
Vid vilken tidpunkt, kaktemperaturen är då 35°C, kan en smakbit erhållas ?
Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$, där T_0 är rumstemperaturen 25°C och T är kakans temperatur i °C.
<u>Lösning:</u>
Avsvalningsprocessen följer differentialekvationen $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 25)$. Den allmänna lösningen erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $T = Ce^{kt} + 25$. Nu över till den lösning som uppfyller villkoren.
$T(10) = 105$ ger $80 = Ce^{10k}$.
$T(30) = 65$ ger $40 = Ce^{30k}$.
Ledvis division ger $2 = e^{-20k}$ vilket kan skrivas $k = -\dfrac{1}{20}\ln 2$.
Insättning ger $C = 80e^{-10\left(-\frac{1}{20}\ln 2\right)} = 80e^{\ln 2^{\frac{1}{2}}} = 80\ 2^{\frac{1}{2}}$.
Kaktemperaturen, T, vid en godtycklig tidpunkt, t, är
$T = 80\ 2^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{20}\ln 2} + 25 = 80\ 2^{\frac{10-t}{20}} + 25$.
$T = 35$ ger $35 = 80\ 2^{\frac{10-t}{20}} + 25$, $2^{\frac{10-t}{20}} = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$, $\dfrac{10-t}{20} = -3$, $t = 70$.
SVAR: Kaktemperaturen är 35°C efter 70 minuter.

<u>Modul 2.</u>
Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ samt ange den allmänna lösningen.
<u>Lösning:</u>
Vi bestämmer först matrisens egenvärden och egenvektorer.
Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Insättning ger: $0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1$, $(2+\lambda)^2 = 1$, $\lambda = -2 \pm 1$.
Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$.
Motsvarande egenvektorer, $\mathbf{K}$, erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.
Insättning av $\lambda_1 = -1$ ger: $\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, en egenvektor $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Insättning av $\lambda_2 = -3$ ger: $\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -2+3 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, en egenvektor $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
En fundamentalmatris, Φ, består av de linjärt oberoende lösningarna till systemet.
Vi får $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$. Vi kontrollerar att dess determinant är skild ifrån noll.
Detta för att säkerställa att de angivna lösningarna är linjärt oberoende. $\det\Phi = -2e^{-4t} \neq 0$.
Den allmänna lösningen kan skrivas $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är en konstant kolonnvektor.

SVAR: En fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm med laplacetransform lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$y'' + 4y' + 13y = e^{-2t}\cos 3t,\; y(0) = y'(0) = 0$ för $t \geq 0$.

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar och sätter in villkoren: $s^2Y(s) + 4sY(s) + 13Y(s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{s+2}{((s+2)^2 + 3^2)^2}$.

Vid återtransformationen observerar vi att $L^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}L^{-1}\{F(s)\}$.

I vårt fall innebär detta: $L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{((s+2)^2 + 3^2)^2}\right\} = e^{-2t}L^{-1}\left\{\dfrac{s}{((s)^2 + 3^2)^2}\right\}$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = e^{-2t}\frac{t\sin 3t}{6}$$

SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning ges av $y(t) = e^{-2t}\dfrac{t\sin 3t}{6}$.