Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Onsdagen den 22 maj 2013, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Del 1

Modul 1.

Ett föremål tas ut ur en ugn med temperaturen 200 grader Celsius.

Följande modeller för en avsvalningsprocess har föreslagits.

Modell 1: $\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$ Modell 2: $\frac{dT}{dt} = k(T-30)$

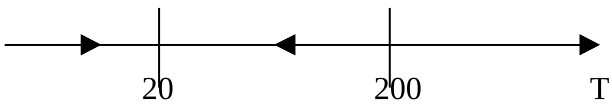
Här är T föremålets temperatur vid tiden t i grader Celsius och k är en positiv konstant.

Undersök vilken modell som är rimlig för avsvalningsprocessen och bestäm därefter föremålets temperatur efter lång tid för den aktuella modellen.

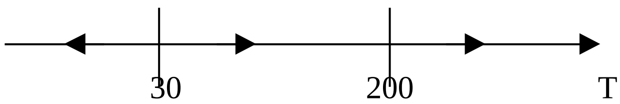
Lösning:

Studera derivatans tecken och rita upp funktionernas uppförande i faslinjen.

Modell 1:



Modell 2:



I modell 1 är derivatan negativ för temperaturer över 20 grader Celsius.

I modell 2 är derivatan positiv för temperaturer över 30 grader Celsius.

Den modell som svarar mot en avsvalningsprocess är modell 1.

Föremålets temperatur efter lång tid är 20 grader Celsius.

SVAR: Det är modell 1 som är rimlig för en avsvalningsprocess.
Föremålets temperatur efter lång tid är 20 grader Celsius.

Modul 2.

Låt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$. Ange i förekommande fall alla reella värden på α för vilka den kritiska punkten (0,0) till systemet av linjära differentialekvationer $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ är a) stabil spiralpunkt och b) center.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix}$.

Vi får $\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0$; $(\lambda - \frac{\alpha}{2})^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{4} = 0$; $(\lambda - \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\alpha^2 - 4}{4}$.

Egenvärdena är $\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$.

a) För att erhålla en stabil spiralpunkt krävs att egenvärdena är komplexa och realdelen är negativ.

Vi får $\begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha^2 - 4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha < 0 \\ -2 < \alpha < 2 \end{cases}$ $\{-2 < \alpha < 0$.

b) För att erhålla ett center krävs att egenvärdena är komplexa och realdelen är noll.

Vi får $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ -2 < \alpha < 2 \end{cases}$ $\{\alpha = 0$.

SVAR: a) $-2 < \alpha < 0$ b) $\alpha = 0$.

Modul 3.

Bestäm $y(\frac{\pi}{4})$ och $y(\pi)$ då $y(t) + \int_0^t (t-v)y(v)dv = U(t) - U(t - \frac{\pi}{2})$ $,t > 0$.

Här är $U(t)$ Heavisides funktion.

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar ekvationen. $Y(s) + \frac{1}{s^2}Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}$.

Lös ut $Y(s)$.

$Y(s)(s^2 + 1) = s(1 - e^{-s\frac{\pi}{2}})$, $Y(s) = \frac{s}{s^2+1}(1 - e^{-s\frac{\pi}{2}})$.

Återtransformera.

$y(t) = \cos t - U(t - \frac{\pi}{2})\cos(t - \frac{\pi}{2})$.

Nu över till de sökta funktionsvärdena.

$y(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} - U(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y(\pi) = \cos\pi - U(\pi - \frac{\pi}{2})\cos(\pi - \frac{\pi}{2}) = -1 - 1 \ 0 = -1$

SVAR: De sökta funktionsvärdena är $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $y(\pi) = -1$.

<u>Del 2</u>

11. Är påståendena a), b) och c) sanna eller falska ? Motivera !

a) Låt $y = f(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = 16 + y^2$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.

b) $y = x^3$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$. Lösningen är entydig.

c) Betrakta differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ där f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två lösningskurvor skär varandra i en punkt i området R.

d) Låt $y_1(x)$, $y_1(x) \neq 0$, vara en lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.
Härled den allmänna lösningen till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

<u>Lösning:</u>

a) Falskt, ty derivatan är större än noll.

b) Falskt, ty även $y = 0$ är en lösning.

c) Falskt, ty villkoren ger att det är entydig lösning.

d) Vi ansätter att den allmänna lösningen till $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ är $y(x) = z(x)y_1(x)$.

Insättning ger $\frac{dz(x)}{dx}y_1(x)+z(x)\frac{dy_1(x)}{dx}+P(x)z(x)y_1(x)=f(x)$.

Vi omformar uttrycket och utnyttjar att $y_1(x)$ är en lösning till $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$.

$\frac{dz(x)}{dx}y_1(x)+z(x)\left(\frac{dy_1(x)}{dx}+P(x)y_1(x)\right)=f(x)$, $\frac{dz(x)}{dx}y_1(x)=f(x)$, $\frac{dz(x)}{dx}=\frac{f(x)}{y_1(x)}$.

Integrera med avseende på x.

$$z(x)=\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx+C$$

$$y(x)=z(x)y_1(x)=y_1(x)\left(\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx+C\right)=Cy_1(x)+y_1(x)\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx\ .$$

Den allmänna lösningen till $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ ges av $y(x)=Cy_1(x)+y_1(x)\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx$.

SVAR: Påståendena a), b) och c) är falska.

d) $y(x)=Cy_1(x)+y_1(x)\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx$. För härledningen se ovan.

12. Vad menas med en fundamentalmängd av lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning tre ?
Funktionerna $y_1=2x^3+3x^4$, $y_2=x^4$, $y_3=x^3$, $y_4=7x^3+5x^3\ln x$ och $y_5=x^4+3x^3\ln x$ är lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning tre.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen samt bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoren
$y(1)=0$, $y'(1)=0$ och $y''(1)=-2$.

Lösning:

$\{y_1,y_2,y_3\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning tre om y_1,y_2 och y_3 satisfierar differentialekvationen samt är linjärt oberoende.
En fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen ges av $\{x^3,x^4,x^3\ln x\}$.
Den allmänna lösningen är $y(x)=ax^3+bx^4+cx^3\ln x$, där a, b och c är godtyckliga reella konstanter. För att bestämma den sökta lösningen behöver vi första- och andraderivatan.

$y'(x)=a3x^2+b4x^3+c3x^2\ln x+cx^2$, $y''(x)=a6x+b12x^2+c6x\ln x+c3x+c2x$.

Villkoren ger $\begin{cases}0=y(1)=a+b\\0=y'(1)=3a+4b+c\\-2=y''(1)=6a+12b+5c\end{cases}$ $\begin{cases}a=-b\\0=b+c\ ,\ c=-b\\-2=-6b+12b-5b\ ,\ b=-2\end{cases}$ $\begin{cases}a=2\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

Den sökta lösningen är $y(x)=2x^3-2x^4+2x^3\ln x$. Observera att $x>0$.

SVAR:

$\{y_1,y_2,y_3\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning tre om y_1,y_2 och y_3 satisfierar differentialekvationen samt är linjärt oberoende.
En fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen ges av $\{x^3,x^4,x^3\ln x\}$.
Den sökta lösningen är $y(x)=2x^3-2x^4+2x^3\ln x$.

13. Betrakta en funktion given av $f(x)=\begin{cases}3+x\ , & 0<x<\pi\\-3+x\ , & -\pi<x<0\end{cases}$.

Vidare gäller att $f(x+2\pi)=f(x)$. Bestäm fourierserien hörande till funktionen f .

Bestäm även fourierseriens summa för $x = -\dfrac{3\pi}{2}$ och $x = 3\pi$.

<u>Lösning:</u>
Funktionen f är en udda funktion. Den är periodisk med perioden 2π.

f har en fourierserie på formen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, där $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Vi utnyttjar att f och $\sin nx$ är udda funktioner och får då $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(3+x)\sin nx\,dx$.

Partiell integration ger $b_n = \dfrac{2}{\pi}\left[(3+x)\dfrac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1\frac{-\cos nx}{n}\,dx = \frac{2}{\pi}\left((3+\pi)\frac{-\cos n\pi}{n} + 3\frac{1}{n} - 0\right)$.

f tilldelas fourierserien $f \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{-2\cos n\pi}{n} + 6\frac{1-\cos n\pi}{\pi n}\right)\right)\sin nx$.

I "Mathematics Handbook" under "Special Fourierseries" kan (2) och (19) användas.
Vid beräkning av fourierseriernas summa användes $f(x+2\pi) = f(x)$.
Fourierserien konvergerar mot funktionsvärdet i punkten vid kontinuitetspunkt.
Fourierserien konvergerar mot medelvärdet i punkten vid diskontinuitetspunkt.
Vi använder att funktionen är periodisk, dvs $f(x+2\pi) = f(x)$.

För $x = -\dfrac{3\pi}{2}$ konvergerar fourierserien mot $f(-\dfrac{3\pi}{2}) = f(-2\pi + \dfrac{\pi}{2}) = f(\dfrac{\pi}{2}) = 3 + \dfrac{\pi}{2}$.

För $x = 3\pi$ konvergerar fourierserien mot

$$\frac{f(3\pi^+) + f(3\pi^-)}{2} = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{(-3-\pi) + (3+\pi)}{2} = 0 .$$

SVAR:

f tilldelas fourierserien $f \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{-2\cos n\pi}{n} + 6\frac{1-\cos n\pi}{\pi n}\right)\right)\sin nx$.

För $x = -\dfrac{3\pi}{2}$ konvergerar fourierserien mot $3 + \dfrac{\pi}{2}$.

För $x = 3\pi$ konvergerar fourierserien mot 0.

14. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$?

Systemet har följande lösningar $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 2e^t + 5e^{3t} \\ e^t + 5e^{3t} \end{pmatrix}$.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{Y}_1$, till systemet $\mathbf{Y}' = \mathbf{B}\mathbf{Y}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{Y}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

<u>Lösning:</u>
Fundamentallösningar till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ är linjärt oberoende lösningar till systemet och spänner upp lösningsrummet.
I en fundamentalmatris består kolonnerna av de linjärt oberoende lösningarna. I vårt fall behövs två.

Vi väljer fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$, observera att $\det\Phi = e^{4t} \neq 0$.

Nu över till bestämning av den konstanta matrisen $\mathbf{A}$. Varje kolonn i fundamentalmatrisen satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Detta innebär att även fundamentalmatrisen satisfierar $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Vi får $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$. Vi bestämmer $\mathbf{A}$ genom att multiplicera $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ med inversen till Φ från höger.
Detta ger $\Phi'\Phi^{-1} = \mathbf{A}\Phi\Phi^{-1}$, $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2e^{t} & 3e^{3t} \\ e^{t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1} = \frac{1}{e^{4t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$\Phi'\Phi^{-1} = \mathbf{A}\Phi\Phi^{-1}$, $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$

$$\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{t} & 3e^{3t} \\ e^{t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En lösning, $\mathbf{Y}_1$, till systemet $\mathbf{Y}' = \mathbf{BY}$ ges av $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda t}$.

För att erhålla en av $\mathbf{Y}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet ansätter vi $\mathbf{Y} = (\mathbf{L} + \mathbf{M}t)e^{\lambda t}$.

Insättning i systemet $\mathbf{Y}' = \mathbf{BY}$ ger $\mathbf{M}e^{\lambda t} + (\mathbf{L} + \mathbf{M}t)e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{B}(\mathbf{L} + \mathbf{M}t)e^{\lambda t}$

$$t\{\mathbf{BM} - \lambda\mathbf{M}\} + \{\mathbf{BL} - \lambda\mathbf{L} - \mathbf{M}\} = \mathbf{0}$$

Identifiering ger $\begin{cases} (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{M} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{M} \end{cases}$.

Vi ser här att $\mathbf{M}$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{B}$ och $\mathbf{L}$ är en lösning till $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{M}$.

SVAR:

Fundamentallösningar till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ är linjärt oberoende lösningar till systemet och spänner upp lösningsrummet.

En fundamentalmatrisen är $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{3t} \\ e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$. Den konstanta matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda t}$. En av $\mathbf{Y}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet: $\mathbf{Y} = (\mathbf{L} + \mathbf{M}t)e^{\lambda t}$. $\begin{cases} (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{M} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{M} \end{cases}$

15. Vid tiden $t = 0$ innehåller en damm 10 miljoner rent vatten.
Inget vatten kan försvinna via avdunstning från ytan eller läckage genom dammens botten.
Med hastigheten 5 miljoner liter per år flyter för $t > 0$ orent vatten, innehållande en kemikalie, ut i dammen och blandas omedelbart med vattnet i dammen. Det blandade vattnet kan sedan flyta ut med samma hastighet som det inströmmande. Koncentrationen $c(t)$ av kemikalien i det inströmmande vattnet ges av $c(t) = 2 + \sin 2t$ gram per liter, där t mäts i år.

a) Låt $Q(t)$ vara mängden i gram av kemikalien i dammen som funktion av tiden t.
Ställ upp en differentialekvation vars lösning ger $Q(t)$.

b) Bestäm $Q(t)$, $t > 0$.

c) Efter lång tid kommer $Q(t)$ att närma sig en funktion som pendlar mellan två värden m och M, där $m < M$. Bestäm dessa två värden.

Lösning:

a) Vi får $\dfrac{dQ}{dt} = 5 \cdot 10^{6} \cdot (2 + \sin 2t) - 5 \cdot 10^{6} \cdot \dfrac{Q(t)}{10 \cdot 10^{6}}$.

b) För enklare beräkningar inför vi en ny variabel $q(t) = 10^{-6} \cdot Q(t)$ vilket ger

$$\frac{dq}{dt} = 5(2 + \sin 2t) - \frac{q(t)}{2}.$$

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen vilken omformas till standardform

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 10 + 5\sin 2t.$$

Den allmänna lösningen erhålles som summan av allmänna homogena lösningen och summan av partikulärlösningarna.

Allmänna homogena lösningen är $q_a = Ae^{-\frac{t}{2}}$.

Partikulärlösning ett $q_{p_1} = 20$ och för partikulärlösning två ansätter vi $q_{p_2}(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$.

Insättning i differentialekvationen $\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 5\sin 2t$

ger $-2a\sin 2t + 2b\cos 2t + \frac{a\cos 2t + b\sin 2t}{2} = 5\sin 2t$

Förenkling ger $(-10 - 4a + b)\sin 2t + (4b + a)\cos 2t = 0$ vilket ger $a = -4b$ och $-10 + 17b = 0$.

Vi får $q_{p_2}(t) = -\frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t$.

Den allmänna lösningen blir $q(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} + 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t$.

Bestäm konstanten A. Vid starten är det rent vatten vilket innebär att $q(0) = 0$.

Insättning ger $0 = q(0) = A + 20 - \frac{40}{17}$ och $A = -\frac{300}{17}$.

Den allmänna lösningen blir $q(t) = -\frac{300}{17}e^{-\frac{t}{2}} + 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t$ och

$Q(t) = 10^6\ \ q(t) = 10^6(-\frac{300}{17}e^{-\frac{t}{2}} + 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t)$.

c) För stora värden på tiden t kan exponentialfunktionen försummas. Vi gör en grov uppskattning och konstaterar att cosinus och sinus ligger mellan minus ett och ett. Vi får då uppskattningen

$10^6(20 - \frac{40}{17} - \frac{10}{17}) < Q(t) < 10^6(20 + \frac{40}{17} + \frac{10}{17})$

$17\ \ 10^6 \approx m = \frac{290}{17}10^6 < Q(t) < \frac{390}{17}10^6 = M \approx 23\ \ 10^6$.

SVAR: a) $\frac{dQ}{dt} = 5\ \ 10^6\ \ (2 + \sin 2t) - 5\ \ 10^6\ \ \frac{Q(t)}{10\ \ 10^6}$

b) $Q(t) = 10^6\ \ q(t) = 10^6(-\frac{300}{17}e^{-\frac{t}{2}} + 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t)$

c) $17\ \ 10^6 \approx m = \frac{290}{17}10^6 < Q(t) < \frac{390}{17}10^6 = M \approx 23\ \ 10^6$