Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Onsdagen den 22 maj 2013, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

Modul 1.
Ett föremål tas ut ur en ugn med temperaturen 200 grader Celsius.
Följande modeller för en avsvalningsprocess har föreslagits.
<u>Modell 1</u>: $\dfrac{dT}{dt} = -k(T-20)$ <u>Modell 2</u>: $\dfrac{dT}{dt} = k(T-30)$
Här är T föremålets temperatur vid tiden t i grader Celsius och k är en positiv konstant.
Undersök vilken modell som är rimlig för avsvalningsprocessen och bestäm därefter föremålets temperatur efter lång tid för den aktuella modellen.

Modul 2.
Låt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$. Ange i förekommande fall alla reella värden på α för vilka den kritiska punkten (0,0) till systemet av linjära differentialekvationer $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ är a) stabil spiralpunkt och b) center.

Modul 3.
Bestäm $y(\frac{\pi}{4})$ och $y(\pi)$ då $y(t) + \int_0^t (t-v)y(v)dv = U(t) - U(t-\frac{\pi}{2})$, $t > 0$.
Här är $U(t)$ Heavisides funktion.

<u>Del 2</u>

11. Är påståendena a), b) och c) sanna eller falska ? Motivera !

a) Låt $y = f(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = 16 + y^2$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.

b) $y = x^3$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$. Lösningen är entydig.

c) Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ där f och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två lösningskurvor skär varandra i en punkt i området R.

d) Låt $y_1(x)$, $y_1(x) \neq 0$, vara en lösning till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.
Härled den allmänna lösningen till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

vgv

12. Vad menas med en fundamentalmängd av lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning tre ?
Funktionerna $y_1 = 2x^3 + 3x^4$, $y_2 = x^4$, $y_3 = x^3$, $y_4 = 7x^3 + 5x^3 \ln x$ och $y_5 = x^4 + 3x^3 \ln x$ är lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning tre.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen samt bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoren
$y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ och $y''(1) = -2$.

13. Betrakta en funktion given av $f(x) = \begin{cases} 3 + x \;, & 0 < x < \pi \\ -3 + x \;, & -\pi < x < 0 \end{cases}$.
Vidare gäller att $f(x + 2\pi) = f(x)$. Bestäm fourierserien hörande till funktionen f .
Bestäm även fourierseriens summa för $x = \dfrac{3\pi}{2}$ och $x = 3\pi$.

14. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$?
Systemet har följande lösningar $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 2e^t + 5e^{3t} \\ e^t + 5e^{3t} \end{pmatrix}$.
Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{Y}_1$, till systemet $\mathbf{Y}' = \mathbf{B}\mathbf{Y}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{Y}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

15. Vid tiden $t = 0$ innehåller en damm 10 miljoner rent vatten.
Inget vatten kan försvinna via avdunstning från ytan eller läckage genom dammens botten.
Med hastigheten 5 miljoner liter per år flyter för $t > 0$ orent vatten, innehållande en kemikalie, ut i dammen och blandas omedelbart med vattnet i dammen. Det blandade vattnet kan sedan flyta ut med samma hastighet som det inströmmande. Koncentrationen $c(t)$ av kemikalien i det inströmmande vattnet ges av $c(t) = 2 + \sin 2t$ gram per liter, där t mäts i år.

a) Låt $Q(t)$ vara mängden i gram av kemikalien i dammen som funktion av tiden t.
   Ställ upp en differentialekvation vars lösning ger $Q(t)$.
b) Bestäm $Q(t)$, $t > 0$.
c) Efter lång tid kommer $Q(t)$ att närma sig en funktion som pendlar mellan två värden m och M, där $m < M$. Bestäm dessa två värden.