Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Tisdagen den 4 juni 2013, kl 14.15-16.45.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Betrakta begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dt} + y = y^2$, $y(0) = 2$.

Bestäm lösningens existensintervall.

Lösning:

Differentialekvationen är av Bernoulli typ (Den är även separabel.)

Vi omformar differentialekvationen $y^{-2}\frac{dy}{dt} + y^{-1} = 1$.

Sätt $z = y^{-1}$, $\frac{dz}{dt} = -y^{-2}\frac{dy}{dt}$.

$-\frac{dz}{dt} + z = 1$, $\frac{dz}{dt} - z = -1$.

Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogen lösningen och en partikulärlösning. Vi får $z(t) = Ae^t + 1$ eller $y = z^{-1} = \frac{1}{Ae^t + 1}$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret $y(0) = 2$ ger $2 = y(0) = \frac{1}{A+1}$, $A = -\frac{1}{2}$.

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är $y = \frac{1}{-\frac{1}{2}e^t + 1} = \frac{2}{2 - e^t}$.

Här är $2 - e^t \neq 0$, $t \neq \ln 2$. Vi väljer nu det delintervall som innehåller $t = 0$.

Vi får $\{t :\ t < \ln 2\}$.

SVAR: Lösningens existensintervall är $\{t :\ t < \ln 2\}$.

Modul 2.

Bestäm allmänna lösningen till systemet $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

samt ange om den enda kritiska punkten är stabil eller instabil.

Lösning:

Systemet $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har endast den triviala lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ty $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Det innebär att origo är den enda kritiska punkten.

Vi bestämmer matrisens egenvärden och egenvektorer.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$.

Insättning ger: $0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 11 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = (\lambda + 4)(\lambda - 9)$.

Egenvärdena är $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = 9$. Detta ger att den enda kritiska punkten är instabil.

Motsvarande egenvektorer, $\mathbf{K}$, erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

Insättning av $\lambda_1 = -4$ ger: $\begin{pmatrix} 7+4 & 2 \\ 11 & -2+4 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X}_1 = e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Insättning av $\lambda_2 = 9$ ger: $\begin{pmatrix} 7-9 & 2 \\ 11 & -2-9 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X}_2 = e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen erhålles som en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna.

Vi får $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den enda kritiska punkten, origo, är instabil.

Modul 3.

Bestäm $u(x,y)$ då $\begin{cases} u'_x = u'_y + 3u \\ u(x,0) = 4e^x - 5e^{-2x} \end{cases}$.

Lösning:

Vi ansätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) + 3X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$\dfrac{X'(x)}{X(x)} = \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} + 3 = \text{konstant} = \lambda$, ty $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{X'(x)}{X(x)}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{Y'(y)}{Y(y)} + 3\right) = 0$.

Den partiella differentialekvationen omformas till ett system av ordinära differentialekvationer. $\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ Y'(y) = (\lambda - 3)Y(y) \end{cases}$ $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-3)y} \end{cases}$.

För varje λ erhålles en lösning $u_\lambda(x,y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda-3)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda-3)y}$.

Även linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Vi får $u(x,y) = \sum_\lambda c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda-3)y}$.

Det återstår att bestämma konstanterna.

Villkoret $u(x,0) = 4e^x - 5e^{-2x} = \sum_\lambda c_\lambda e^{\lambda x}$ ger $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \ , c_1 = 4 \\ \lambda_2 = -2 \ , c_2 = -5 \end{cases}$.

Insättning av konstanterna ger $u(x,y) = 4e^{x-2y} - 5e^{-2x-5y}$.

SVAR: Den lösning som uppfyller den partiella differentialekvationen och villkoret ges av $u(x,y) = 4e^{x-2y} - 5e^{-2x-5y}$.