Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Tisdagen den 20 augusti 2013, kl 1400-1900.

Del 1

Modul 1.

En termometer tas inifrån ett rum och ut där temperaturen är 5 °C.
Efter 1 minut avläses 15 °C och efter 2 minuter avläses 10 °C. Vad är rummets temperatur ?
Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan termometern och omgivningen.

Lösning:

Låt $T(t)$ vara temperaturen vid tiden t och k en proportionalitetskonstant.
Newtons avsvalningslag ger följande differentialekvation $\frac{dT}{dt} = k(T-5)$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av ordning ett.
Dess allmänna lösning är summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Vi får $T(t) = Ae^{kt} + 5$. Temperaturen vid tiden $t = 0$ skall bestämmas.
De givna villkoren ger följande system: $\begin{cases} 15 = T(1) = Ae^{k} + 5 \\ 10 = T(2) = Ae^{2k} + 5 \end{cases}$ vilket förenklas till $\begin{cases} 10 = Ae^{k} \\ 5 = Ae^{2k} \end{cases}$.
Division ger $2 = e^{-k}$, $k = -\ln 2$ vilket ger $A = 20$.
Temperaturen vid tiden t är $T(t) = 20e^{-t\ln 2} + 5$. Rummets temperatur är $T(0) = 20e^{0} + 5 = 25$.
SVAR: Rummets temperatur är 25 °C.

Modul 2.

Antag att $(x+1)y'' + xy' - y = 0 \quad , x > 0$. En lösning till denna ekvation är $y(x) = e^{-x}$.
Bestäm allmänna lösningen.

Lösning:

En lösning är given. Använd reduktion av ordning.
Insättning av $y = e^{-x}z$, $y' = e^{-x}z' - e^{-x}z$, $y'' = e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z$ i differentialekvationen ger:
$(x+1)(e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z) + x(e^{-x}z' - e^{-x}z) - e^{-x}z = 0$, $(x+1)z'' + z'(-2(x+1) + x) = 0$.
Reducera ordningen. Sätt: $u = z'$, $u' = z''$. $(x+1)u' + u(-2-x) = 0$
$\frac{u'}{u} = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$.
Integrera map x: $\ln|u| = x + \ln|x+1| + \ln|C_1|$, $u = \pm C_1(x+1)e^{x} = C_2(x+1)e^{x}$, $z' = C_2(x+1)e^{x}$.
Integrera map x: $z = C_2xe^{x} + C_3$. $y = e^{-x}z = e^{-x}(C_2xe^{x} + C_3) = C_2x + C_3e^{-x}$.
Kontrollera att även $y(x) = x$ är en lösning till differentialekvationen.
Vi har två linjärt oberoende lösningar vars linjärkombination är den allmänna lösningen.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y = C_2x + C_3e^{-x}$.

Modul 3.

För den jämna funktionen f med perioden 2π gäller att $f(x) = \sin x$, då $0 < x < \pi$.
Bestäm fourierseriens summa för $x = \frac{3\pi}{2}$. Ange även f:s fourierserie.

Lösning:

Funktionen f är kontinuerlig för $x = \frac{3\pi}{2}$. Då är fourierseriens summa lika med
$f(\frac{3\pi}{2}) = \{\text{perioden är } 2\pi\} = f(\frac{3\pi}{2} - 2\pi) = f(-\frac{\pi}{2}) = \{f \text{ är jämn}\} = f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$
Enligt BETA har f fourierserien $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

SVAR: Fourierseriens summa för $x = \dfrac{3\pi}{2}$ är ett. Fourierserien är $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 1}\cos 2nx$.

<u>Del 2</u>

11. Betrakta randvärdesproblemet $y'' + \lambda y = 0 \quad , y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0$. Undersök om det är möjligt att bestämma värden på λ så att problemet får a) triviala lösningar b) icke-triviala lösningar.

<u>Lösning:</u>

Vi undersöker lösningarna till den homogena differentialekvationen för alla reella värden på λ

Vi börjar med den karakteristiska ekvationen $r^2 + \lambda = 0$.

Behandla de tre fallen $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

<u>$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$</u>

$y'' + \mu^2 y = 0$ har lösningen $y = A_1 \cos \mu x + B_1 \sin \mu x$.

Villkoren ger $\begin{cases} 0 = y(0) = A_1 \\ 0 = y(\frac{\pi}{2}) = A_1 \cos\frac{\mu\pi}{2} + B_1 \sin\frac{\mu\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} 0 = A_1 \\ 0 = B_1 \sin\frac{\mu\pi}{2} \end{cases}$.

Icke-trivial lösning då $\dfrac{\mu\pi}{2} = n\pi,\ \mu = 2n$ dvs $\lambda = (2n)^2 = 4n^2,\ n > 0,\ n \in N$.

Trivial lösning då $\lambda \neq 4n^2$.

<u>$\lambda = 0$</u>

$y'' = 0$ har lösningen $y = A_2 x + B_2$.

Villkoren ger $\begin{cases} 0 = y(0) = B_2 \\ 0 = y(\frac{\pi}{2}) = A_2 \frac{\pi}{2} + B_2 \end{cases} \begin{cases} B_2 = 0 \\ A_2 \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \{A_2 = B_2 = 0$.

Endast den trivial lösning erhålles för $\lambda = 0$.

<u>$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$</u>

$y'' - \mu^2 y = 0$ har lösningen $y = A_3 e^{\mu x} + B_3 e^{-\mu x}$.

Villkoren ger $\begin{cases} 0 = y(0) = A_3 + B_3 \\ 0 = y(\frac{\pi}{2}) = A_3 e^{\frac{\mu\pi}{2}} + B_3 e^{-\frac{\mu\pi}{2}} \end{cases} \begin{cases} B_3 = -A_3 \\ 0 = A_3 (e^{\frac{\mu\pi}{2}} - e^{-\frac{\mu\pi}{2}}) \end{cases} \{A_3 = B_3 = 0$.

Endast den trivial lösning erhålles för $\lambda < 0$.

SVAR: a) Triviala lösningar erhålles för $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda \neq 4n^2,\ n \in N$.

b) Icke-triviala lösningar erhålles för $\lambda = 4n^2,\ n > 0,\ n \in N$. ($y = B_1 \sin 2nx$).

12. Bestäm en kontinuerlig funktion som är styckvis deriverbar och uppfyller begynnelsevärdesproblemet $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$ och $y(0) = 2$.

<u>Lösning:</u>

Vi har en linjär differentialekvation av ordning ett.

Multiplicera differentialekvationen med en integrerande faktor. En integrerande faktor är e^{x^2}.

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + e^{x^2} 2xy = \begin{cases} e^{x^2} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases},\quad \frac{d}{dx}\left\{ y e^{x^2} \right\} = \begin{cases} e^{x^2} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases},\quad y e^{x^2} = \begin{cases} e^{x^2} + c_1 & 0 \le x < 1 \\ c_2 & x \ge 1 \end{cases}.$$

Bestäm konstanterna. Villkoret $y(0) = 2$ ger $2 = 1 + c_1$, $c_1 = 1$. $y = \begin{cases} 1 + e^{-x^2} & 0 \le x < 1 \\ c_2 e^{-x^2} & x \ge 1 \end{cases}$.

Det återstår att bestämma konstanten c_2. Kontinuitetsvillkoret ger $1 + e^{-1} = c_2 e^{-1}$, $c_2 = 1 + e$.

Vi får $y = \begin{cases} 1 + e^{-x^2} & 0 \le x < 1 \\ (1+e)e^{-x^2} & x \ge 1 \end{cases}$.

SVAR: Den styckvis deriverbara, kontinuerliga lösningen är $y = \begin{cases} 1 + e^{-x^2} & 0 \le x < 1 \\ (1+e)e^{-x^2} & x \ge 1 \end{cases}$.

13. Vad menas med att två lösningar till en linjär differentialekvation av ordning två är linjärt oberoende ? Låt $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 + x^3$ och $y_3(x) = 3x^2 + 4x^3$ vara lösningar till differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0,\ x > 0$. Låt vidare $y_p = x^2 \ln x$ vara en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = g(x),\ x > 0$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

Lösning:

Låt f och g vara två lösningar till en linjär differentialekvation.
Då är funktionerna linjärt oberoende om och endast om ekvationen $c_1 f + c_2 g = 0$ endast har den triviala lösningen dvs $c_1 = c_2 = 0$.
Vi väljer ut två linjärt oberoende lösningar. Tag $y_1(x) = x^2$ och $y_4(x) = x^3$.
Insättning i den homogena differentialekvationen ger: $\begin{cases} x^2 6x + ax3x^2 + bx^3 = 0 \\ x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 6 + 3a + b = 0 \\ 2 + 2a + b = 0 \end{cases}$.
Systemet har lösningen $a = -4$, $b = 6$. Det återstår att bestämma $g(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen av partikulärlösningen $y_p = x^2 \ln x$ med konstanterna $a = -4$, $b = 6$ ger $g(x) = x^2(2\ln x + 2 + 1) - 4x(2x\ln x + x) + 6x^2 \ln x = -x^2$.
Den inhomogena differentialekvationen är $x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2$.
SVAR: Vår sökta differentialekvation är $x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2$.

14. Låt Φ vara en fundamentalmatris till systemet av linjära differentialekvationer $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.
Härled en partikulärlösning till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, där $\mathbf{F}$ är en vektorvärd funktion.
Bestäm allmänna lösningen till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$.

Lösning:

Den allmänna lösningen till $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ kan skrivas $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$ där $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.
Vi ansätter en partikulärlösning till $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ på formen $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{U}(t)$.
Insättning ger $\frac{d\Phi}{dt}\mathbf{U}(t) + \Phi\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$, $\left(\frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{A}\Phi\right)\mathbf{U}(t) + \Phi\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{F}$.
Varje kolonn i fundamentalmatrisen Φ är en lösning till det homogena systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.
Vi får $\Phi\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{F}$.
Multiplicera med inversen till fundamentalmatrisen Φ. Den existerar ty $\det\Phi \ne 0$.
$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \Phi^{-1}\mathbf{F}$. Integrera med avseende på t : $\mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}\mathbf{F}dt$.
En partikulärlösning till $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ ges av $\mathbf{X} = \Phi\int\Phi^{-1}\mathbf{F}dt$.
Nu över till att bestämma den allmänna lösningen till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$.

Den erhålles som summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen och tillhörande egenvektorer.
På grund av att matrisen är triangulär kan egenvärdena direkt avläsas i matrisens diagonal.
Det är multipelt egenvärde $\lambda_{1,2} = -1$.

Tillhörande egenvektor fås ur systemet $(\mathbf{A} - \lambda\ \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Endast en egenvektor har erhållits. En lösning är $\mathbf{X}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Den andra lösningen ansätter vi på formen $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{L}t + \mathbf{M})e^{\lambda t}$.

Insättning i $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ ger $\mathbf{L}e^{\lambda t} + (\mathbf{L}t + \mathbf{M})e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{A}(\mathbf{L}t + \mathbf{M})e^{\lambda t}$.

Identifiering ger $\begin{cases} t^1: & \lambda\ \mathbf{L} = \mathbf{AL} \\ t^0: & \mathbf{L} + \lambda\mathbf{M} = \mathbf{AM} \end{cases}$ omformning ger $\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\ \mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda\ \mathbf{I})\mathbf{M} = \mathbf{L} \end{cases}$.

Vi skall bestämma vektorn $\mathbf{M}$. Egenvektorn $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är redan bestämd.

Vi söker en lösning till $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den andra lösningen är $\mathbf{X}_2 = e^{-t}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{-t}}{4} \\ te^{-t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 4te^{-t} \end{pmatrix}$.

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}$ och dess determinant är e^{-2t}.

Fundamentalmatrisens determinant är $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{e^{-2t}}\begin{pmatrix} 4te^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & 0 \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning är $\mathbf{X}_p = \Phi\int\Phi^{-1}\mathbf{F}dt = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 4te^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}dt$.

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 5t \\ -1 \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{5t^2}{2} \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -\dfrac{3}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$ är $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} + \mathbf{X}_p$.

Vi får $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -\dfrac{3}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen till det inhomogena systemet är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -\dfrac{3}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}$.

15. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?
b. Undersök om följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.
c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ så att $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

Lösning:

a. Två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$ då $\int_0^L f(x)g(x)dx = 0$.

b. Vi undersöker om $\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0$ för alla heltal m och n så att $m \neq n,\ m > 0,\ n > 0$.

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx = \{m \neq n\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^\pi = 0$$

c. f är periodisk med perioden T då $f(t+T) = f(t)$ för alla t .

d. Vi börjar med att konstatera att $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

Det innebär att koefficienterna har bestämts.

Vi har att $b_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_3 = \dfrac{1}{4}$ och övriga $b_n = 0$,

SVAR: Koefficienterna $b_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_3 = \dfrac{1}{4}$ och $b_n = 0$ $,n \neq 1$ $,n \neq 3$.