Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Tisdagen den 20 augusti 2013, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

Modul 1.
En termometer tas inifrån ett rum och ut där temperaturen är 5 °C.
Efter 1 minut avläses 15 °C och efter 2 minuter avläses 10 °C. Vad är rummets temperatur ?
Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan termometern och omgivningen.

Modul 2.
Antag att $(x+1)y'' + xy' - y = 0 \quad , x > 0$. En lösning till denna ekvation är $y(x) = e^{-x}$.
Bestäm allmänna lösningen.

Modul 3.
För den jämna funktionen f med perioden 2π gäller att $f(x) = \sin x$, då $0 < x < \pi$.
Bestäm fourierseriens summa för $x = \dfrac{3\pi}{2}$. Ange även f:s fourierserie.

vgv

Del 2

11. Betrakta randvärdesproblemet $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Undersök om det är möjligt att bestämma värden på λ så att problemet får a) triviala lösningar b) icke-triviala lösningar.

12. Bestäm en kontinuerlig funktion som är styckvis deriverbar och uppfyller begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$ och $y(0) = 2$.

13. Vad menas med att två lösningar till en linjär differentialekvation av ordning två är linjärt oberoende ? Låt $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 + x^3$ och $y_3(x) = 3x^2 + 4x^3$ vara lösningar till differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$. Låt vidare $y_p = x^2 \ln x$ vara en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = g(x)$, $x > 0$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

14. Låt Φ vara en fundamentalmatris till systemet av linjära differentialekvationer $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.
Härled en partikulärlösning till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, där $\mathbf{F}$ är en vektorvärd funktion.
Bestäm allmänna lösningen till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$.

15. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?
b. Undersök om följden $\{\sin x, \ \sin 2x, \ \sin 3x, \ldots\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.
c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?
d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ så att $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.