Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Onsdagen den 4 september 2013, kl 16.15-17.45.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ x \end{pmatrix}$ samt ange den allmänna lösningen.

<u>Lösning:</u>

Systemet $\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ x \end{pmatrix}$ kan skrivas $\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda-3)$, $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -3$.

Egenvektorerna erhålles ur ekvationen $\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

<u>$\lambda_1 = 1$</u> $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En lösning är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

<u>$\lambda_2 = -3$</u> $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En lösning är $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

En fundamentalmatris, Φ, består av de linjärt oberoende lösningarna till systemet.

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de linjärt oberoende lösningarna.

Den kan skrivas $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, där $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ är en reellvärd konstant vektor.

SVAR: En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, där $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ är en reellvärd konstant vektor.

Modul 3.

Bestäm $u(x,t)$ då $u'_x(x,t) + u'_t(x,t) = 3u(x,t)$ och $u(x,0) = 5e^{-x} + 3e^{2x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X'(x)T(t) + X(x)T'(t) = 3X(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X'(x)}{X(x)} + \dfrac{T'(t)}{T(t)} = 3$, $\dfrac{X'(x)}{X(x)} = 3 - \dfrac{T'(t)}{T(t)}$. Derivera med avseende på x.

Vi får $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{X'(x)}{X(x)}\right) = 0$. Detta innebär att vänstra ledet och högra ledet är konstant.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 3 - \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \text{konstant}$$

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ T'(t) = (3-\lambda)T(t) \end{cases}$$

Vi skriver upp dess lösning: $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ T(t) = Be^{(3-\lambda)t} \end{cases}$.

Insättning i $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $u(x,t) = Ae^{\lambda x}Be^{(3-\lambda)t} = Ce^{\lambda x + (3-\lambda)t}$.

Även linjärkombinationer av dessa lösningar är lösning till differentialekvationen.

Villkoret $u(x,0) = 5e^{-x} + 3e^{2x}$ ger att det behövs två lösningar av ovanstående form.

Vi skriver $u(x,t) = C_1e^{\lambda_1 x + (3-\lambda_1)t} + C_2e^{\lambda_2 x + (3-\lambda_2)t}$.

Villkoret $u(x,0) = 5e^{-x} + 3e^{2x}$ ger $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = u(x,0) = 5e^{-x} + 3e^{2x}$.

Vi får $C_1 = 5$, $\lambda_1 = -1$, $C_2 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

Insättning ger $u(x,t) = 5e^{-x+4t} + 3e^{2x+t}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = 5e^{-x+4t} + 3e^{2x+t}$.