Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Fredagen den 25 oktober 2013, kl 0800-1300.

Del 1

Modul 1.

Öl som innehåller 6% alkohol pumpas in i ett fat, vilket innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Låt $V(t)$ och $A(t)$ vara mängden öl respektive mängden alkohol i tanken, mätta i liter, vid tiden t, mätt i minuter.
Bestäm alkoholhalten i vätskan efter 200 minuter.

Lösning:

Mängden öl i tanken vid tiden t är $V(t) = 400 - (4-3)t = 400 - t$.
Tanken är tom vid tiden $t = 400$. Vi studerar förloppet fram till tiden $t = 400$.
Beträffande alkoholmängden gäller att:
Inflödet är konstant 0,06x3=0,18 och utflödet är $\dfrac{A(t)}{V(t)}\text{x}4 = \dfrac{4A(t)}{400-t}$.
I startögonblicket $t = 0$ är alkoholmängden 400x0,03=12 liter.
Vi får begynnelsevärdesproblemet: $\dfrac{dA}{dt} = 0{,}18 - \dfrac{4A(t)}{400-t}$, $A(0) = 12$.
Vi har en första ordningens linjär differentialekvation. Denna löses med integrerande faktor.
Differentialekvationen omformas. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{4A(t)}{400-t} = 0{,}18$.
En integrerande faktor är $(400-t)^{-4}$. Multiplicera differentialekvationen med $(400-t)^{-4}$.
Vi får $(400-t)^{-4}\dfrac{dA}{dt} + (400-t)^{-4}\dfrac{4A(t)}{400-t} = 0{,}18(400-t)^{-4}$.
Vänstra ledet kan skrivas som en derivata $\dfrac{d}{dt}\left\{(400-t)^{-4}A(t)\right\} = 0{,}18(400-t)^{-4}$.
Integrera med avseende på t: $(400-t)^{-4}A(t) = 0{,}06(400-t)^{-3} + C$.
Villkoret $A(0) = 12$ ger $C = 400^{-4}\cdot 12 - 0{,}06\cdot 400^{-3} = 400^{-4}(12 - 0{,}06\cdot 400) = -12\cdot 400^{-4}$.
Insättning och hyfsning ger: $A(t) = 0{,}06(400-t) - 12\cdot 400^{-4}(400-t)^4$.
Alkoholmängden efter 200 minuter är

$$A(200) = 0{,}06\cdot 200 - 12\cdot 400^{-4}\cdot 200^4 = 12\left(1-\frac{1}{2^4}\right) = 12\cdot\frac{15}{16} = \frac{45}{4} .$$

Andelen alkohol i tankinnehållet efter 200 minuter är $\dfrac{45}{4}\cdot\dfrac{1}{400-200} = \dfrac{45}{800}$ och alkoholhalten är därmed $\dfrac{45}{8} \approx 5{,}6\,\%$. Svaret är rimligt ty 5,6<6.

SVAR: Alkoholhalten i tankinnehållet efter 200 minuter är $\dfrac{45}{8} \approx 5{,}6\,\%$.

Modul 2.

En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
Avgör en partikels öde om den vid tiden $t = 5$ befinner sig i punkten $(-2\,,\,4\,)$.
Ange även den allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma egenvärden och därefter egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(1-\lambda+2)(1-\lambda-2)=(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Egenvärdena blir $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$. Bestäm motsvarande egenvektorer $\mathbf{K}$, där $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

<u>$\lambda_1=3$</u>

$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\mathbf{K}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $k_1 \in R$.

<u>$\lambda_2=-1$</u>

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\mathbf{K}=k_2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, $k_2 \in R$.

Motsvarande lösningar blir:

<u>$\lambda_1=3$</u> : $\mathbf{X_1}=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ <u>$\lambda_2=-1$</u> $\mathbf{X}_2=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

Den allmänna lösningen erhålles som linjärkombinationer av $\mathbf{X_1}$ och $\mathbf{X}_2$.

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X_1}+c_2\mathbf{X}_2=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t} & e^{-t}\\ 2e^{3t} & -2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Observera att punkten $(-2\,,\,4)$ ligger på den räta linje vars riktningsvektor ges av $\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

Då t växer går partiklen mot origo.

SVAR: Den allmänna lösningen $\mathbf{X}=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t} & e^{-t}\\ 2e^{3t} & -2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$.

Partikeln går mot origo då t växer obegränsat.

Modul 3.

Bestäm $f(t)$ då $f(t)=2\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)du+3\sin 2t,\ t\ge 0$.

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar integralekvationen.

$$F(s)=2F(s)\frac{s}{s^2+4}+3\frac{2}{s^2+4}$$

Lös ut $F(s)$.

$$F(s)(s^2+4-2s)=6$$

$$F(s)=\frac{6}{s^2-2s+4}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{(s-1)^2+3}$$

Återtransformera.

$$f(t)=2\sqrt{3}e^t\sin t\sqrt{3}$$

SVAR: Den sökta lösningen är $f(t)=2\sqrt{3}e^t\sin t\sqrt{3}$.

<u>Del 2</u>

11. Bestäm en styckvis deriverbar kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx}+2xy=f(x)\,,\ f(x)=\begin{cases}x\ , & 0\le x<1\\ 0\ , & x\ge 1\end{cases}\ ,\ y(0)=2.$$

<u>Lösning:</u>

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.

Multiplicera ekvationen med en integrerande faktor. En sådan integrerande faktor är $e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$.

Vi erhåller då $e^{x^2}\dfrac{dy}{dx}+e^{x^2}2xy=\begin{cases} e^{x^2}x \ , \ 0\le x<1 \\ 0 \qquad x\ge 1\end{cases}$.

Vänstra ledet kan nu skrivas en derivata: $\dfrac{d}{dx}\left\{e^{x^2}y\right\}=\begin{cases} e^{x^2}x \ , \ 0\le x<1 \\ 0 \qquad x\ge 1\end{cases}$.

Integrera med avseende på x : $e^{x^2}y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C_1 \ , \ 0\le x<1 \\ C_2 \qquad , \ x\ge 1\end{cases}$.

Utnyttja först det givna begynnelsevillkoret $y(0)=2$. Detta ger $2=\dfrac{1}{2}+C_1$, $C_1=\dfrac{3}{2}$.

Insatt ovan ger $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-x^2} \ , \ 0\le x<1 \\ C_2e^{-x^2} \qquad , \ x\ge 1\end{cases}$. Det återstår att bestämma den andra konstanten. Den sökta lösningen skall vara kontinuerlig. Då skall höger- och vänstergränsvärdet för lösningen i $x=1$ vara lika.

Detta ger oss $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-1}=C_2e^{-1}$, $C_2=\dfrac{e+3}{2}$.

SVAR: En styckvis deriverbar kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet är

$$y=\begin{cases}\dfrac{1+3e^{-x^2}}{2} \ , \ 0\le x<1 \\ \dfrac{e+3}{2}e^{-x^2} , \ x\ge 1\end{cases}.$$

12. Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.
Det tvådimensionella hastighetsfältet beskrivs av systemet

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(2+x) \\ \dfrac{dy}{dt}=(x-y)(1-x-y)\end{cases}$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

<u>Lösning:</u>

I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.
Vi får

$$\begin{cases}0=y(2+x) \\ 0=(x-y)(1-x-y)\end{cases}$$

Detta system har följande lösningar: (0,0), (1,0), (-2,-2) och (-2,3).
För att undersöka de kritiska punkternas karaktär linjariserar vi med hjälp av Jacobimatrisen.
Insättning av respektive kritisk punkt i Jacobimatrisen och bestämning av matrisens egenvärden ger oss möjlighet att bestämma karaktären hos den kritiska punkten.

$$\mathbf{J}(x,y)=\begin{pmatrix} y & 2+x \\ 1-x-y-x+y & -1+x+y-x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 2+x \\ 1-2x & 2y-1\end{pmatrix}$$

<u>(0,0)</u> <u>(1,0)</u> <u>(-2,-2)</u> <u>(-2,3)</u>

$\mathbf{J}(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{A}$ $\quad\mathbf{J}(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{B}$ $\quad\mathbf{J}(-2,-2)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 5 & -5\end{pmatrix}=\mathbf{C}$ $\quad\mathbf{J}(-2,3)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 5\end{pmatrix}=\mathbf{D}$

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A1}-\lambda\ \mathbf{I})$ där A1 är den aktuella matrisen.

<u>(0,0)</u>

$$0=\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)$$

Egenvärdena har skilda tecken. Instabilt.

<u>(1,0)</u>

$$0=\begin{vmatrix}-\lambda & 3\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+3=(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$$

Egenvärdena är komplexa med negativ realdel. Stabilt.

<u>(-2,-2)</u>

Egenvärdena är -2 och -5. Stabilt.

<u>(-2,3)</u>

Egenvärdena är 3 och 5. Instabilt.

Mörtarna kan få lugn och ro i två punkter: (1,0) och (-2,-2)

SVAR: Mörtarna får lugn och ro i punkterna (1,0) och (-2,-2).

13. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella matriselement. Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A}$ är $\lambda=\alpha+i\beta$, där $\alpha \in R$ och $\beta \in R$. Tillhörande egenvektor är $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer.
<u>Härled</u> två reella linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.

Genomför även beräkningarna för matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>

Låt $\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2$ vara en komplex lösning till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.

Insättning ger: $\mathbf{X}_1'+i\mathbf{X}_2'=\mathbf{A}(\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2)=\mathbf{AX}_1+i\mathbf{AX}_2$.

Tag real- respektive imaginärdel: $\begin{cases}\mathrm{Re}: \mathbf{X}_1'=\mathbf{AX}_1\\ \mathrm{Im}: \mathbf{X}_2'=\mathbf{AX}_2\end{cases}$.

Realdel och imaginärdel av den komplexa lösningen är lösningar till systemet.

En komplex lösning ges av $\mathbf{X}=e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2)$.

$$\begin{cases}\mathrm{Re}: \mathbf{X}_1=e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\cos\beta t-\mathbf{v}_2\sin\beta t)\\ \mathrm{Im}: \mathbf{X}_2=e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\sin\beta t+\mathbf{v}_2\cos\beta t)\end{cases}$$

Observera att de två lösningarna är linjärt oberoende, ty det finns inga konstanter a och b skilda ifrån noll så att $a\mathbf{X}_1+b\mathbf{X}_2=\mathbf{0}$.

Nu över till de numeriska beräkningarna. Vi startar med att bestämma matrisens egenvärden.

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2+9\ ,\ \lambda_{1,2}=4\pm i3.$$

Bestäm en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda_1=4+i3$.

Insättning av detta egenvärde i systemet $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix}-3i & -3\\ 3 & -3i\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$. En komplex lösning

är $\mathbf{X}=e^{(4+i3)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^{4t}(\cos 3t+i\sin 3t)\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right\}$.

Två linjärt oberoende lösningar är: $\begin{cases}\mathrm{Re}\,\mathbf{X}=\mathbf{X}_1=e^{4t}(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos 3t-\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\sin 3t)=e^{4t}\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}\\ \mathrm{Im}\,\mathbf{X}=\mathbf{X}_2=e^{4t}(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin 3t+\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cos 3t)=e^{4t}\begin{pmatrix}\sin 3t\\ -\cos 3t\end{pmatrix}\end{cases}$.

Vi kontrollerar det linjära oberoendet genom att visa att Wronskianen är skilt ifrån noll.

$$W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{4t}\cos 3t & e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\sin 3t & -e^{4t}\cos 3t \end{vmatrix} = -e^{8t} \neq 0 \,.$$

SVAR: Två linjärt oberoende lösningar ges av $\begin{cases} \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1 \cos\beta t - \mathbf{v}_2 \sin\beta t) \\ \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1 \sin\beta t + \mathbf{v}_2 \cos\beta t) \end{cases}$.

Numeriskt erhålles: $\mathbf{X}_1 = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}$.

14. Bestäm fourierserien till funktionen f som ges av $f(t) = \begin{cases} 0 \;, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ \cos t \;, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $f(t+\pi) = f(t)$.

Bestäm därefter $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

<u>Lösning:</u> Den givna funktionen är varken jämn eller udda.

Fourierserien är på formen: $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{\pi/2} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\pi/2}\right)$, där fourierkoefficienterna ges av

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\cos 2nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\cos 2nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\big(\cos(1+2n)t + \cos(1-2n)t\big)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+2n)t}{1+2n} + \frac{\sin(1-2n)t}{1-2n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{1+2n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-n\pi)}{1-2n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{1+2n} + \frac{\cos n\pi}{1-2n}\right) =$$

$$= \frac{\cos n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{\cos n\pi}{\pi}\,\frac{2}{1-4n^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\,.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\sin 2nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\sin 2nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\big(\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t\big)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} - \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2n+1} + \frac{1-\cos(n\pi-\frac{\pi}{2})}{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{4n}{\pi(4n^2-1)}\,.$$

Den givna funktionen f tilldelas fourierserien:

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nt + \frac{4n}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nt\right).$$

Vid beräkning av den sökta seriesumman sätter vi in ett lämpligt värde på t. En studie av den sökta seriesumman och den uträknade fourierserien ger att ett lämpligt värde är $t = \frac{\pi}{2}$. Vänster- och högergränsvärdena blir lika med noll. Vi erhåller följande likhet:

$$0 = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos n\pi + \frac{4n}{\pi(4n^2-1)}\sin n\pi\right) \;;\;\; 0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1+n}}{(4n^2-1)}\right)$$

Förenkling ger: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1} = 1$. Vi får att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

<u>Anmärkning.</u> Den sökta seriesumman kan även bestämmas genom att en partialsumma beräknas och en därpå följande gränsvärdesbestämning utföres.

Partialsumman $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right)$. Vi har en teleskoperande serie.

Efter förenkling blir partialsumman $S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

SVAR: Fourierserien ges av $f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nt + \frac{4n}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nt\right)$.

Seriesumman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

15. P är en två gånger deriverbar funktion som uppfyller $P(0) = P'(0) = 0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + P'(x)y' + P''(x)y = P''(x)$ som
uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.
<u>Lösning:</u>
Den givna differentialekvationen kan skrivas $y'' + (P'(x)y)' = P''(x)$.
Integrera med avseende på x : $y' + P'(x)y = P'(x) + C_1$. Villkoren ger $C_1 = 0$.
Vår differentialekvation är linjär av första ordningen och har formen $y' + P'(x)y = P'(x)$.
Bestäm en integrerande faktor och multiplicera differentialekvationen med denna.
<u>En</u> integrerande faktor ges av $e^{\int P'(x)dx} = e^{P(x)}$; $e^{P(x)}y' + e^{P(x)}P'(x)y = e^{P(x)}P'(x)$.
Omformning ger: $(e^{P(x)}y)' = e^{P(x)}P'(x)$. Integrera med avseende på x : $e^{P(x)}y = e^{P(x)} + C_2$.
Villkoren ger: $C_2 = 1$ vilket insatt i ekvatonen ger $y = 1 + e^{-P(x)}$.

SVAR: Den sökta lösningen ges av $y = 1 + e^{-P(x)}$.