Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Måndagen den 25 november 2013, kl 16.30-18.00.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + y = y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Ange därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Detta är en differentialekvation av Bernoulli typ.
Den triviala lösningen, $y \equiv 0$, är ej av intresse i detta fall.
Omforma differentialekvationen genom att multiplicera med y^{-2}.
Då erhålles: $xy^{-2}y' + y^{-1} = \sqrt{x}$.
Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.
Insättning i differentialekvationen ger $-xz' + z = \sqrt{x}$, $xz' - z = -\sqrt{x}$.
Vi har fått en linjär differentialekvation och denna löses med hjälp av en integrerande faktor.
Först skriver vi om differentialekvationen på standardform: $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Multiplicera med en integrerande faktor, $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}z\right) = -x^{-\frac{3}{2}}$

Integrera med avseende på x: $\frac{z}{x} = 2x^{-\frac{1}{2}} + C$, $z = 2\sqrt{x} + Cx$.
Men $z = y^{-1}$ ger: $y^{-1} = 2\sqrt{x} + Cx$.
Det givna villkoret ger: $1 = 2 + C$, $C = -1$.
Den sökta lösningen är $y = \frac{1}{2\sqrt{x} - x}$.
Lösningens existensintervall skall uppfylla följande villkor :
$x > 0$ och $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) \neq 0$ samt innehålla $x = 1$.
Detta ger oss intervallet $\{x : 0 < x < 4\}$.
SVAR: Differentialekvationens lösning är $y = \frac{1}{2\sqrt{x} - x}$ och dess existensintervall är $\{x : 0 < x < 4\}$.

Modul 2.

Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2$, $x > 0$.
En lösning till motsvarande homogena differentialekvation är $y = x^2$.

Lösning:

Vi använder metoden reduktion av ordning.
Sätt $y = x^2z$, $y' = x^2z' + 2xz$, $y'' = x^2z'' + 2xz' + 2xz' + 2z$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger
$x^2(x^2z'' + 2xz' + 2xz' + 2z) - 4x(x^2z' + 2xz) + 6x^2z = -x^2$, $x > 0$; $z'' = -x^{-2}$, $x > 0$.
Integrera med avseende på x två gånger. $z' = x^{-1} + C_1$; $z = \ln x + C_1x + C_2$.
Den sökta lösningen är $y = x^2z = x^2(\ln x + C_1x + C_2) = C_1x^3 + C_2x^2 + x^2\ln x$.
Vi ser att den allmänna lösningen är summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning, där $y_h = C_1x^3 + C_2x^2$ och $y_p = x^2\ln x$.
SVAR: Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen
ges av $y = C_1x^3 + C_2x^2 + x^2\ln x$.

Modul 3.

Bestäm Fourierserien till funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \sin^2 t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Lösning:

Den givna funktionen är en jämn funktion med perioden π och dess Fourierserie har formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt$, där fourierkoefficienterna är

$$a_0 = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt \quad \text{och} \quad a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos 2nt \ \sin^2 t\,dt\ .$$

Vi utvecklar vår funktion enligt följande $f(t) = \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

Vi har erhållit den sökta Fourierserien.

Vi tilldelar funktionen f Fourierserien $\frac{1-\cos 2t}{2}$, dvs $f(t) \sim \frac{1-\cos 2t}{2}$.

SVAR: Den sökta Fourierserien är $\frac{1-\cos 2t}{2}$.