Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.
Tisdagen den 7 januari 2014, kl 0800-1300.

Del 1

Modul 1.

Befolkningen i en liten stad växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningsmängden. Den ursprungliga befolkningen på 500 personer har på 10 år växt med 10%.
Ställ upp en differentialekvation för befolkningsmängden och tillhörande villkor.
Det påstås att antalet personer i den lilla staden understiger 600 personer efter 20 år.
Undersök om påståendet är sant eller falskt.

Lösning:

Låt $P(t)$ vara befolkningsmängden vid tiden t. Låt vidare k vara proportionalitetskonstanten.
Vi erhåller då följande differentialekvation: $\dfrac{dP}{dt} = kP$.
Tillhörande villkor är $P(0) = 500$ och $P(10) = 500 \cdot 1{,}1$.
Den allmänna lösningen är $P(t) = Ce^{kt}$. Det återstår att bestämma konstanterna.

De givna villkoren ger oss följande system: $\begin{cases} 500 = P(0) = C \\ 500 \cdot 1{,}1 = P(10) = Ce^{k10} \end{cases}$ $\begin{cases} C = 500 \\ e^{k10} = 1{,}1 \end{cases}$ $k = \dfrac{1}{10}\ln 1{,}1$.

Befolkningsmängden vid tiden t är $P(t) = 500e^{t\frac{1}{10}\ln 1{,}1} = 500 \cdot 1{,}1^{\frac{t}{10}}$.
Efter 20 år är befolkningsmängden $P(20) = 500 \cdot 1{,}1^2 = 605$.
Eftersom det finns 605 personer efter 20 år är påståendet falskt.

SVAR: Differentialekvation är $\dfrac{dP}{dt} = kP$ och villkoren är $P(0) = 500$ och $P(10) = 500 \cdot 1{,}1$.
Påståendet är falskt.

Modul 2.

Låt $y = t^2$ vara en lösning till differentialekvationen $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0 \quad , t > 0$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2y'' - 3ty' + 4y = 4t^2 \;,\; t > 0$.

Lösning:

Vi använder reduktion av ordning. Sätt $y = t^2z$. Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger $t^2(t^2z'' + 4tz' + 2z) - 3t(t^2z' + 2tz) + 4t^2z = 4t^2$.
Förenkla $t^4z'' + t^3z' = 4t^2$. Sätt $u = z' \;,\; u' = z''$.
Insättning och omformning ger $tu' + u = 4t^{-1}$. Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen vars vänstra led är en derivata $(tu)' = 4t^{-1}$.
Integrera med avseende på t : $tu = 4\ln t + C_1$. Men $z' = u = \dfrac{4\ln t}{t} + \dfrac{C_1}{t}$.
Integrera med avseende på t : $z = 2\ln^2 t + C_1\ln t + C_2$.
Den sökta lösningen är $y = t^2z = t^2(2\ln^2 t + C_1\ln t + C_2) = 2t^2\ln^2 t + C_1t^2\ln t + C_2t^2$.
Observera att den givna lösningen finns med.
SVAR: Den sökta lösningen är $y = 2t^2\ln^2 t + C_1t^2\ln t + C_2t^2$.

Modul 3.

Den 2-periodiska funktionen f kan utvecklas i en cosinusserie och en sinusserie på intervallet $-1 < x < 1$.
Ange vad respektive serie konvergerar mot för $x = 0$ då $f(x) = x^2 + 5 \quad , \quad 0 < x < 1$

Lösning:

Respektive serie kommer att konvergera mot $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$.

I fallet med cosinusserien blir detta: $\frac{0^2+5+0^2+5}{2}=5$.

I fallet med sinusserien blir detta: $\frac{0^2+5-(0^2+5)}{2}=0$.

SVAR: Cosinusserien konvergerar mot 5 och sinusserien konvergerar mot 0 för $x=0$.

Del 2

11. I en populationsmodell är den **relativa** tillväxthastigheten, som funktion av tusentalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom, nämligen en konstant minus antalet djur gånger en annan konstant. Konstanterna är positiva. Modifiera nu denna modell genom att ta hänsyn till att ett konstant antal djur, h, försäljes per tidsenhet. Dessutom kommer ett konstant antal djur, k, att införskaffas per tidsenhet. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående. Låt därefter konstanterna vara 5, 1, 7 respektive 3. Studera långtidsbeteendet för alla startvärden, $P(0)=P_0$, på populationen.
Kommer populationen att dö ut för några startvärden ? Bestäm i så fall tidpunkten för detta.

Lösning:

Den **relativa** tillväxthastigheten är $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=a-bP$, där konstanterna a och b är positiva.

Omformning ger $\frac{dP}{dt}=P(a-bP)$.

Nu modifieras modellen enligt ovan till: $\frac{dP}{dt}=P(a-bP)-h+k$.

De givna konstanterna insättes: $\frac{dP}{dt}=P(5-P)-7+3=P(5-P)-4=(P-1)(4-P)$.

Denna differentialekvation har de stationära lösningarna: $P=1$ och $P=4$.

Vi gör en kvalitativ analys av den autonoma differentialekvationen.

$P>4$ $\frac{dP}{dt}<0$. Funktionen avtar.

$1<P<4$ $\frac{dP}{dt}>0$. Funktionen växer.

$0<P<1$ $\frac{dP}{dt}<0$. Funktionen avtar.

Då $P_0>1$ kommer funktionen att gå mot 4 då t växer obegränsat.

Då $P_0<1$ kommer funktionen att gå mot 0 då t växer obegränsat.

Detta innebär att populationen kommer att dö ut.

Då $P_0=1$ förändras ej funktionen då t växer obegränsat. (Stationär lösning.)

Då $P_0=4$ förändras ej funktionen då t växer obegränsat. (Stationär lösning.)

Vi bestämmer tidpunkten då populationen blir noll. Vi behöver lösa differentialekvationen.

Den uppställda differentialekvationen, $\frac{dP}{dt}=(P-1)(4-P)$, är separabel.

Konstantlösningarna är redan avklarade. Omformning ger $\frac{1}{(P-1)(4-P)}\frac{dP}{dt}=1$.

Partialbråksuppdela den rationella funktionen: $\left\{\frac{1}{3(P-1)}+\frac{1}{3(4-P)}\right\}\frac{dP}{dt}=1$.

Integration och hyfsning ger: $\ln\left|\frac{P-1}{4-P}\right|=3t+\ln|C_1|$, $\frac{1-P}{4-P}=Ce^{3t}$.

$P(0)=P_0$ ger att $C=\dfrac{1-P_0}{4-P_0}$ vilket insatt ovan ger $\dfrac{1-P}{4-P}=\dfrac{1-P_0}{4-P_0}e^{3t}$.

Populationen har dött ut då $P=0$ vilket ger $e^{3t}=\dfrac{4-P_0}{4(1-P_0)}$, $t=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4-P_0}{4(1-P_0)}$.

SVAR: Då $P_0>1$ kommer funktionen att gå mot 4 då t växer obegränsat.
Då $P_0=1$ förändras ej funktionen då t växer obegränsat.
Då $P_0<1$ kommer funktionen att gå mot 0 då t växer obegränsat.
Populationen har dött ut då $t=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4-P_0}{4(1-P_0)}$.

12. Vad menas med en fundamentalmängd av lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=0 \quad ,x>0$?
Låt $y_1(x)=x^2+x^3$, $y_2(x)=3x^2+2x^3$, $y_3(x)=7x^2$ och $y_4(x)=5x^2-6x^3$ vara lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=0 \quad ,x>0$.
Ange dess fundamentalmängd. Vidare är $y_p(x)=x\ln x$ en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=f(x) \quad ,x>0$.
Bestäm den inhomogen differentialekvationen.
Ange dess allmänna lösning.
<u>Lösning:</u>
En fundamentalmängd av lösningar är mängden av linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen.
Antalet är lika med ordningen hos differentialekvationen. I detta fall två.
En fundamentalmängd av lösningar byggs upp av $y_a(x)=x^2$ och $y_b(x)=x^3$.
Vi får mängden $\{x^2,\ x^3\}$.
Nu över till att bestämma differentialekvationen.
Vi startar med den homogena differentialekvationen.
Insättning av $y_a(x)=x^2$ och $y_b(x)=x^3$ den homogena differentialekvationen ger: systemet:

$$\begin{cases} x^2 2+ax2x+bx^2=0 \\ x^2 6x+ax3x^2+bx^3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2+a2+b=0 \\ 6+a3+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2+a2+b=0 \\ 4+a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=6 \\ a=-4 \end{cases}$$

Vi bestämmer nu högerledet i den inhomogena differentialekvationen.

$$f(x)=x^2\left\{\frac{1}{x}\right\}-4x\left\{\ln x+x\frac{1}{x}\right\}+6x\ln x=2x\ln x-3x$$

Den sökta inhomogena differentialekvationen är $x^2y''-4xy'+6y=2x\ln x-3x$.
Dess allmänna lösning ges av summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Vi får $y=y_a+y_p=c_1x^2+c_2x^3+x\ln x$.
SVAR: En fundamentalmängd av lösningar ges av $\{x^2,\ x^3\}$.
Den inhomogena differentialekvationen är $x^2y''-4xy'+6y=2x\ln x-3x$.
Den allmänna lösningen är $y=c_1x^2+c_2x^3+x\ln x$

13. För det linjära systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}$ är en 2x2-matris gäller att $\mathbf{A}$:s egenvärden är sammanfallande och endast en linjärt oberoende egenvektor erhålles.
Bestäm formen på de två linjärt oberoende lösningarna samt ange hur de kan bestämmas.
Låt vidare Φ vara en fundamentalmatris till det homogen systemet.
Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{F}$.

Tillämpa ovanstående för att bestämma den allmänna lösningen

till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>

Låt $\mathbf{A}$:s egenvärde vara λ och tillhörande egenvektor vara $\mathbf{K}$.

En lösning är då $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda t}$. Vi ansätter den andra lösningen på formen $\mathbf{X}_2 = e^{\lambda t}(\mathbf{M}t + \mathbf{L})$.

Insättning i systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ ger $e^{\lambda t}\lambda(\mathbf{M}t + \mathbf{L}) + e^{\lambda t}\mathbf{M} = e^{\lambda t}(\mathbf{AM}t + \mathbf{AL})$.

Omformning ger: $\mathbf{M} = (\mathbf{AM} - \lambda\mathbf{M})t + \mathbf{AL} - \lambda\mathbf{L}$.

Observera att $\mathbf{M} = \mathbf{IM}$ och $\mathbf{L} = \mathbf{IL}$, där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen.

Vi får följande ekvation: $\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{M}t + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{L}$.

Identifiering ger systemet: $\begin{cases} t^1: & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{M} = \mathbf{0} \\ t^0: & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{M} \end{cases}$.

Vi ser att $\mathbf{M}$ är en egenvektor och vi sätter den lika med $\mathbf{K}$.

För att härleda en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ utgår vi från den allmänna lösningen till det homogena systemet.

Den kan skrivas med hjälp av fundamentalmatrisen Φ: $\mathbf{X}_h = \Phi\mathbf{C}$.

Ansätt partikulärlösningen som $\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$.

Insättning i det inhomogena systemet ger $\Phi'(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$.

Omforma ekvationen: $\{\Phi'(t) - \mathbf{A}\Phi(t)\}\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$.

$\Phi'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)$, ty varje kolonn i fundamentalmatrisen Φ är en lösning till $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

$\{\Phi'(t) - \mathbf{A}\Phi(t)\}\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$ övergår i $\Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$.

Multiplicera med inversen till fundamentalmatrisen från vänster: $\mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}$.

Integrera med avseende på t: $\mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}dt$.

En partikulärlösning är $\mathbf{X}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}dt$.

Nu över till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Här skall två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet samt en partikulärlösning till det inhomogena systemet bestämmas.

Först bestämmes egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, $\lambda_{1,2} = 2$. Det är ett multipelt egenvärde.

Bestäm tillhörande egenvektor. $\begin{pmatrix} 4-2 & -4 \\ 1 & 0-2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En lösning är $\mathbf{X}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den andra lösningen är på formen $\mathbf{X}_2 = e^{2t}(\mathbf{M}t + \mathbf{L})$, där $\mathbf{M} = \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{L}$ bestämmes ur ekvationen $\begin{pmatrix} 4-2 & -4 \\ 1 & 0-2 \end{pmatrix}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De två linjärt oberoende lösningarna är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$.

Nu över till en partikulärlösning. En fundamentalmatris skrivas $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$.

Inversen är $\Phi^{-1} = -e^{-4t}\begin{pmatrix} te^{2t} & -(2t+1)e^{2t} \\ -e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{-2t} & (2t+1)e^{-2t} \\ e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

$\mathbf{U}'(t) = \begin{pmatrix} -te^{-2t} & (2t+1)e^{-2t} \\ e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t \\ 4 \end{pmatrix}$ integrera $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t^2 \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4t^2+4t)e^{2t} \\ 2t^2e^{2t} \end{pmatrix}$

SVAR: För härledningarna se ovan.

De två linjärt oberoende lösningarna är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning är $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} (4t^2+4t)e^{2t} \\ 2t^2e^{2t} \end{pmatrix}$.

14. Härled laplacetransformen till Heavisides stegfunktion $U(t-a)$ utgående från definitionen. Bestäm vidare laplacetransformen till $f_\varepsilon(t) = \dfrac{U(t-a)U(a+\varepsilon-t)}{\varepsilon}$ och låt därefter $\varepsilon \to 0$ på transformsidan. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y'' + 2y' + 5y = \delta(t-3)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$, där $\delta(t-3)$ är Diracs deltafunktion.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$.

För Heavisides stegfunktion $U(t-a)$ får vi

$$L\{U(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}U(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \{s>0\} = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

Nu över till $f_\varepsilon(t) = \dfrac{U(t-a)U(a+\varepsilon-t)}{\varepsilon}$.

Vi noterar att $U(t-a) = \begin{cases} 1 & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$ samt $U(a+\varepsilon-t) = \begin{cases} 1 & , a+\varepsilon > t \\ 0 & , a+\varepsilon < t \end{cases}$.

Det innebär att $f_\varepsilon(t) = \dfrac{U(t-a)U(a+\varepsilon-t)}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & , \ a < t < a+\varepsilon \\ 0 & , t < a \ , \ t > a+\varepsilon \end{cases}$.

Då kan vi skriva $f_\varepsilon(t) = \dfrac{U(t-a) - U(t-(a+\varepsilon))}{\varepsilon}$.

Laplacetransformera $L\{f_\varepsilon(t)\} = L\left\{\dfrac{U(t-a) - U(t-(a+\varepsilon))}{\varepsilon}\right\} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{e^{-sa}}{s} - \dfrac{e^{-s(a+\varepsilon)}}{s}\right)$.

För gränsvärdesbestämmningen använder vi oss av MacLaurinutveckling.

$$L\{f_\varepsilon(t)\} = \frac{e^{-sa}}{s\varepsilon}\left(1-(1+s\varepsilon+O(\varepsilon^2))\right) = e^{-sa}(1+O(\varepsilon)) \to e^{-sa} \quad , \varepsilon \to 0 .$$

Laplacetransfornera $y'' + 2y' + 5y = \delta(t-3)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = e^{-3s}$

Insättning av villkoren ger $s^2Y(s) - s - 7 + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = e^{-3s}$.

$Y(s) = \dfrac{e^{-3s} + s + 9}{s^2 + 2s + 5}$, $Y(s) = \dfrac{e^{-3s} + s + 1 + 2\cdot 4}{(s+1)^2 + 4}$.

Återtransformera: $y(t) = U(t-3)e^{-(t-3)}\dfrac{1}{2}\sin 2(t-3) + e^{-t}(\cos 2t + 4\sin 2t)$

SVAR: För härledningen se ovan. $L\{f_\varepsilon(t)\} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{e^{-sa}}{s} - \dfrac{e^{-s(a+\varepsilon)}}{s}\right)$. $L\{f_\varepsilon(t)\} \to e^{-sa}$, $\varepsilon \to 0$.

Den sökta lösningen är $y(t) = U(t-3)e^{-(t-3)}\dfrac{1}{2}\sin 2(t-3) + e^{-t}(\cos 2t + 4\sin 2t)$.

15. Bestäm den 2π-periodiska lösningen till $y'(t) + 2y(t-\pi) = \sin t$, $-\infty < t < \infty$.
Ledning: Ansätt lösningen till att vara en fourierserie.
Lösning:

Vi ansätter $y(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nt + nb_n \cos nt)$$

$$y(t-\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n(t-\pi) + b_n \sin n(t-\pi)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(-1)^n \cos nt + b_n(-1)^n \sin nt)$$

Insättning i ekvationen ger:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nt + nb_n \cos nt) + 2\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(-1)^n \cos nt + b_n(-1)^n \sin nt)\right\} = \sin t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}((-na_n + 2b_n(-1)^n)\sin nt + (nb_n + 2a_n(-1)^n)\cos nt) + a_0 = \sin t$$

Identifiering ger: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ -na_n + 2b_n(-1)^n = 0 \quad , n > 1 \\ nb_n + 2a_n(-1)^n = 0 \quad , n > 1 \\ -a_1 - 2b_1 = 1 \quad , n = 1 \\ b_1 - 2a_1 = 0 \quad , n = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = b_n = 0 \quad , n > 1 \\ a_1 = \dfrac{-1}{5} \;,\; b_1 = \dfrac{-2}{5} \end{cases}$.

Den sökta lösningen är $y(t) = -\dfrac{1}{5}\cos t - \dfrac{2}{5}\sin t$.

SVAR: Den 2π-periodiska lösningen är $y(t) = -\dfrac{1}{5}\cos t - \dfrac{2}{5}\sin t$.