Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Tisdagen den 7 januari 2014, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.
Befolkningen i en liten stad växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningsmängden.
Den ursprungliga befolkningen på 500 personer har på 10 år växt med 10%.
Ställ upp en differentialekvation för befolkningsmängden och tillhörande villkor.
Det påstås att antalet personer i den lilla staden understiger 600 personer efter 20 år.
Undersök om påståendet är sant eller falskt.

Modul 2.
Låt $y = t^2$ vara en lösning till differentialekvationen $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0 \quad , t > 0$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2y'' - 3ty' + 4y = 4t^2$, $t > 0$.

Modul 3.
Den 2-periodiska funktionen f kan utvecklas i en cosinusserie och en sinusserie
på intervallet $-1 < x < 1$.
Ange vad respektive serie konvergerar mot för $x = 0$ då $f(x) = x^2 + 5 \quad , \quad 0 < x < 1$

vgv

Del 2

11. I en populationsmodell är den **relativa** tillväxthastigheten, som funktion av tusentalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom, nämligen en konstant minus antalet djur gånger en annan konstant. Konstanterna är positiva. Modifiera nu denna modell genom att ta hänsyn till att ett konstant antal djur, h, försäljes per tidsenhet. Dessutom kommer ett konstant antal djur, k, att införskaffas per tidsenhet. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående. Låt därefter konstanterna vara 5, 1, 7 respektive 3. Studera långtidsbeteendet för alla startvärden, $P(0) = P_0$, på populationen. Kommer populationen att dö ut för några startvärden ? Bestäm i så fall tidpunkten för detta.

12. Vad menas med en fundamentalmängd av lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0 \quad , x > 0$?
Låt $y_1(x) = x^2 + x^3$, $y_2(x) = 3x^2 + 2x^3$, $y_3(x) = 7x^2$ och $y_4(x) = 5x^2 - 6x^3$ vara lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0 \quad , x > 0$.
Ange dess fundamentalmängd. Vidare är $y_p(x) = x \ln x$ en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x) \quad , x > 0$.
Bestäm den inhomogen differentialekvationen.
Ange dess allmänna lösning.

13. För det linjära systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}$ är en 2x2-matris gäller att $\mathbf{A}$:s egenvärden är sammanfallande och endast en linjärt oberoende egenvektor erhålles.
Bestäm formen på de två linjärt oberoende lösningarna samt ange hur de kan bestämmas.
Låt vidare Φ vara en fundamentalmatris till det homogena systemet.
Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$.
Tillämpa ovanstående för att bestämma den allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

14. Härled laplacetransformen till Heavisides stegfunktion $U(t-a)$ utgående från definitionen. Bestäm vidare laplacetransformen till $f_\varepsilon(t) = \dfrac{U(t-a)U(a+\varepsilon-t)}{\varepsilon}$ och låt därefter $\varepsilon \to 0$ på transformsidan. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y'' + 2y' + 5y = \delta(t-3) \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 7$, där $\delta(t-3)$ är Diracs deltafunktion.

15. Bestäm den 2π-periodiska lösningen till $y'(t) + 2y(t-\pi) = \sin t \quad , -\infty < t < \infty$.
Ledning: Ansätt lösningen till att vara en fourierserie.