Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Onsdagen den 5 februari 2014, kl 17.30-19.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Modul 1.</u>

Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 4y = x^4y^2$, $x > 0$, $y(1) = 1$
samt ange lösningens existensintervall.

<u>Lösning:</u>

Differentialekvationen är av Bernoulli typ.
Vi omformar ekvationen $xy^{-2}y' + 4y^{-1} = x^4$.
Sätt $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$ vilket ger $-xz' + 4z = x^4$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av ordning ett.
Ekvationen skrives på standardform $z' - 4x^{-1}z = -x^3$.
Differentialekvationen löses med hjälp av integrerande faktor.
En integrerande faktor är $e^{\int -4x^{-1}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$.
Multiplicera differentialekvationen $z' - 4x^{-1}z = -x^3$ med integrerande faktorn.
Vi erhåller då följande ekvation $x^{-4}z' - 4x^{-5}z = -x^{-1}$.
Observera att vänstra ledet är en derivata. $\frac{d}{dx}\left(x^{-4}z\right) = -x^{-1}$.
Integrera med avseende på x.
$x^{-4}z = -\ln x + C$ vilket omformas till $z = -x^4\ln x + Cx^4$.
Men $z = y^{-1}$ och vi får $y^{-1} = -x^4\ln x + Cx^4$.
Villkoret $y(1) = 1$ ger $C = 1$ och därmed blir $y = \frac{1}{x^4(1-\ln x)}$
Nu skall $x^4(1-\ln x)$ vara skilt från noll , dvs $x \neq 0$ $x \neq e$.
Existensintervallat är det delintervall som innehåller $x = 1$.

SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \frac{1}{x^4(1-\ln x)}$
och dess existensintervall är $\{\ x : \ 0 < x < e\ \}$.

<u>Modul 2.</u>

Klassificera med avseende på typ och stabilitet/instabilitet de stationära punkterna till systemet av icke-linjära differentialekvationer $\begin{cases} x' = x + xy \\ y' = 4y - 2xy \end{cases}$.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer först de stationära punkterna.
De erhålles då hastighetsvektorn år lika med nollvektorn.
$\begin{cases} 0 = x(1+y) \\ 0 = 2y(2-x) \end{cases}$ vilket ger punkterna (0, 0) och (2, -1).
Punkternas karaktär bestämmes av egenvärdena till Jacobimatrisen i de aktuella punkterna.
Jacobimatrisen är $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ -2y & 4-2x \end{pmatrix}$.
Punkten (0, 0) ger $\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Egenvärdena är positiva och punkten är en instabil nod.

Punkten (2, -1) ger $\mathbf{J}(2,-1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0=\begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ 2 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4=(\lambda+2)(\lambda-2)$.

Vi får $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=2$.
Egenvärdena har olika tecken och därmed är (2, -1) instabil och en sadelpunkt.

SVAR: (0, 0) är en instabil nod och (2, -1) är instabil och är en sadelpunkt.

<u>Modul 3.</u>
Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $u'_x=u'_y+u$ som uppfyller villkoret $u(x,0)=4e^{-2x}+5e^{3x}$.
<u>Lösning:</u>
Vi ansätter $u(x,y)=X(x)Y(y)$.
Insättning i differentialekvationen ger $X'(x)Y(y)=X(x)Y'(y)+X(x)Y(y)$.
Dividera med $X(x)Y(y)$ och vi får $\dfrac{X'(x)}{X(x)}=\dfrac{Y'(y)}{Y(y)}+1$.
Eftersom vänstra ledet är oberoende av y och högra ledet är oberoende av x är respektive led lika med en gemensam konstant λ.
Insättning ger $\dfrac{X'(x)}{X(x)}=\dfrac{Y'(y)}{Y(y)}+1=\lambda$.

Detta ger ett system av ordinära differentialekvationer $\begin{cases}X'(x)=\lambda X(x)\\ Y'(y)=(\lambda-1)Y(y)\end{cases}$.

Dess lösning är $\begin{cases}X(x)=A_\lambda e^{\lambda x}\\ Y(y)=B_\lambda e^{(\lambda-1)y}\end{cases}$ för varje λ och $u_\lambda=A_\lambda e^{\lambda x}B_\lambda e^{(\lambda-1)y}$.

Även linjärkombinationer är lösning och vi får $u(x,y)=\sum_\lambda C_\lambda e^{\lambda x}e^{(\lambda-1)y}$.

Villkoret $u(x,0)=4e^{-2x}+5e^{3x}$ ger $u(x,0)=4e^{-2x}+5e^{3x}=\sum_\lambda C_\lambda e^{\lambda x}$.

Identifiering ger $\begin{cases}\lambda_1=-2 \quad , \quad C_{\lambda_1}=4\\ \lambda_2=3 \quad , \quad C_{\lambda_2}=5\end{cases}$ Övriga $C_\lambda=0$.

Den lösning som uppfyller den partiella differentialekvationen och det givna villkoret ges av $u(x,y)=4e^{-2x-3y}+5e^{3x+2y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y)=4e^{-2x-3y}+5e^{3x+2y}$.