Lösningsförslag till kompletteringstentamen i
SF1633 (5B1206) Differentialekvationer I,
SF1637(5B1212) Differentialekvationer och transformer III.
Måndagen den 31 januari 2011, kl 1715-1815.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.
I en tank på 50 liter finns 10 l vatten. En saltlösning med 1 gram salt per liter pumpas in med en hastighet av 4 liter per minut. Den väl blandade lösningen pumpas ut med hastigheten 2 l per minut.
Bestäm saltmängden i tanken vid den tidpunkt då tanken är full.
Lösning:
Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tidpunkten t.
Saltmängdens förändring per tidsenhet ges av $\frac{dS(t)}{dt} = 4 \quad 1 \quad 2 \quad \frac{S(t)}{10+t(4 \quad 2)}$.
Omforma differentialekvationen: $\frac{dS(t)}{dt} + \frac{S(t)}{5+t} = 4$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen.
Den löses med hjälp av en integrerande faktor vilken är $5+t$.
Multiplikation ger: $(5+t)\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 4(5+t)$ eller $\frac{d}{dt}\{(5+t)S(t)\} = 4(5+t)$.
Integrera med avseende på t : $(5+t)S(t) = 2(5+t)^2 + C$.
Bestäm konstanten med hjälp av villkoret $S(0) = 0$. Vi får $0 = 2(5)^2 + C$, $C = \quad 50$.
Saltmängden i tanken vid tidpunkten t ges av $S(t) = 2(5+t) \quad \frac{50}{5+t}$.
Tanken är full då $50 = 10 + t(4 \quad 2)$, $t = 20$.
Saltmängden i tanken vid den tidpunkt då tanken är full är $S(20) = 2(5+20) \quad \frac{50}{5+20} = 48$ g .
SVAR: Saltmängden i tanken vid den tidpunkt då tanken är full är $S(20) = 48$ g .

Modul 2.
Bestäm de stationära punkterna till systemet $\frac{d}{dt}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 2xy \\ x^2 \quad 1 \quad y \end{matrix}$ och avgör huruvida de är stabila eller instabila.
Lösning:
Stationära punkter erhålles då tangentvektorn (hastighetsvektorn) är lika med nollvektorn.
De stationära punkterna är (0, -1), (1,0) och (-1,0).
Karaktären hos de stationära punkterna undersökes med hjälp av Jacobimatrisen.
Jacobimatrisen blir $\mathbf{J} = \begin{matrix} 2y & 2x \\ 2x & 1 \end{matrix}$.
Insättning av respektive punkt ger oss en konstant matris vars egenvärden bestämmes.
$\mathbf{J}(0, \quad 1) = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ vars egenvärdena är negativa vilket ger oss stabil nod.
Detta gäller även för det icke-linjära systemet.
$\mathbf{J}(1,0) = \begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$. Egenvärdena erhålles ur ekvationen $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
$^2 + \quad 4 = 0$, $(\quad + \frac{1}{2})^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $\quad = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.
Egenvärdena har olika tecken och detta ger oss en sadelpunkt och den är instabil.
Detta gäller även för det icke-linjära systemet.

$\mathbf{J}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärdena erhålles ur ekvationen $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$, $(\lambda + \frac{1}{2})^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Egenvärdena har olika tecken och detta ger oss en sadelpunkt och den är instabil.
Detta gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: (0, -1) stabil nod, (1,0) och (-1,0) sadelpunkter vilka är instabila

<u>Modul 3, SF1633.</u>

Lös ekvationen $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$, då $y(0) = 1$.

<u>Lösning:</u>
Laplacetransformera integrodifferentialekvationen

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + Y(s)\frac{s}{s^2+1}$$

Insättning av villkoret $y(0) = 1$ och förenkling ger

$$s(s^2+1)Y(s) - sY(s) = s + s^2 + 1$$

$$s^3 Y(s) = s + s^2 + 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

Återtransformera

$$y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

SVAR: Integrodifferentialekvationens lösning är $y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$.

<u>Modul 3, SF1637.</u>
Låt $f(t)$ vara signalen $f(t) = \theta(t+1) - \theta(t-1) + \delta(t-2)$, $-\infty < t < \infty$, där $\theta(t)$ är Heavisides stegfunktion och $\delta(t)$ är en Dirac puls. Beräkna realdelen av f:s fouriertransform.
<u>Lösning:</u>
Fouriertransformen ges av

$$F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}(\theta(t+1) - \theta(t-1) + \delta(t-2))e^{-i\omega t}dt$$

Utnyttja linjariteten

$$F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(\theta(t+1) - \theta(t-1))e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-i\omega t}dt$$

Funktionen $\theta(t+1) - \theta(t-1)$ är lika med noll utanför intervallet mellan -1 och 1 och 1 innanför.

$$F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-1}^{1} 1e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-i\omega t}dt$$

$$F\{f(t)\}(\omega) = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1} + \left[e^{-i\omega t}\right]_{t=2}, \quad F\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-i\omega} - e^{+i\omega}}{-i\omega} + e^{-i\omega 2}$$

$$F\{f(t)\}(\omega) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} + e^{-i\omega 2}, \quad F\{f(t)\}(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\omega + \cos 2\omega - i\sin 2\omega$$

Realdelen av f:s fouriertransform ges av $\frac{2}{\omega}\sin\omega + \cos 2\omega$.

SVAR: Realdelen av f:s fouriertransform ges av $\frac{2}{\omega}\sin\omega + \cos 2\omega$.