Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I
och SF1637 Differentialekvationer och transformer III.
Lördagen den 4 februari 2012, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>
Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = y^2 - 9$ samt ange om de är stabila eller instabila. Bestäm de startvärden $y_0 = y(0)$ för vilka $\lim_{t\to\infty} y(t)$ är ändligt.

<u>Modul 2.</u>
Bestäm först den allmänna lösningen till det homogena systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$ och bestäm därefter den allmänna lösningen till det inhomogena systemet $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Modul 3.</u>
Bestäm fourierserien för funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \cos^2 t$ för $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

vgv

Del 2

11. En partikel rör sig längs en x-axel så att dess hastighet i axelns riktning är proportionell mot kvadraten på x-koordinaten $x(t)$.

Proportionalitetskonstanten antas vara 1 (dimension $m^{-1}s^{-1}$ om längd och tid mäts i m respektive s). Vid tiden $t = 0$ har partikeln koordinaten $p \neq 0$.

a) Bestäm $x(t)$ för $t \geq 0$.

b) Undersök om partikeln för lämpliga val av p kan nå origo eller försvinna obegränsat bort från origo inom ändlig tid. Ange i så fall hur lång tid, som funktion av p, detta tar .

12. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

a) Visa att Wronskianen , $W(y_1, y_2)$, till y_1 och y_2 satisfierar $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

b) Härled därefter Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, där C är en konstant.

c) Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,\ -1 < x < 1$.

Bestäm $W(y_1, y_2)$.

d) Vad krävs för att y_1 och y_2 skall bilda en bas för lösningsrummet till den homogena differentialekvationen ?

13. Låt $y = y_1(x)$ vara en lösning till den homogena differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$. Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$. Bestäm därefter en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + 2xy = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \end{cases}$, $y(0) = 2$.

14. Betrakta en smal stav, av längden $\dfrac{\pi}{2}$. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.

Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ ^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.

Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem:
$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u'_x(\dfrac{\pi}{2}, t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

15. Skriv den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + x = x^3$ som ett plant autonomt system.

Klassificera om möjligt systemets kritiska punkter med avseende på stabilitet och typ.