Institutionen för matematik
KTH

Lösningsskisser till tenta 050420, 5B1207. Differentialekvationer II för T2

1. De båda lösningarna $y = e^x$ och $y = x^2e^x$ är linjärt oberoende (ingen av dem är en konstant multipel av den andra). Den homogena ekvationens allmänna lösning är därför

$$y_h = A\,e^x + B\,x^2e^x,\ x > 0.$$

Ansatsen
$$y = A(x)\,e^x + B(x)\,x^2e^x$$
i den inhomogena ekvationen ger villkoret

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x\,e^x \end{pmatrix},$$

där $\boldsymbol{W}$ är Wronskimatrisen
$$\begin{pmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & (2x + x^2)e^x \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & (2x + x^2)e^x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x\,e^x \end{pmatrix} = \frac{e^{-2x}}{2x}\begin{pmatrix} (2x + x^2)e^x & -x^2e^x \\ -e^x & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x\,e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

varav

$$A(x) = -\int x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\ (+\,C) \text{ och } B(x) = \int 1\,dx = x\ (\,+\,C).$$

Man får som en partikulärlösning till den givna inhomogena ekvationen:

$$y_p = -\frac{x^3}{3}\,e^x + x\cdot x^2\,e^x = \frac{2x^3}{3}\,e^x$$

Motsvarande allmänna lösning är då

$$y = y_p + y_h = \frac{2x^3}{3}\,e^x + A\,e^x + B\,x^2e^x\,.$$

$$\textbf{Svar: } y = \left(\frac{2x^3}{3} + A + B\,x^2\right)e^x.$$

2. Laplacetransformering (t.ex med hjälp av motsvarande avsnitt i β) av ekvationen ger:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13\,Y(s) = 3\,e^{-s\pi}.$$

Eftersom $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ kan detta skrivas om till

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = s + 4 + 3\,e^{-s\pi}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{s + 4}{(s + 2)^2 + 9} + \frac{3}{(s + 2)^2 + 9}\,e^{-s\pi}.$$

Inför återtransformering kan man observera att

$$\frac{s + 4}{(s + 2)^2 + 9} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} + \frac{2}{(s + 2)^2 + 9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}\,e^{-2t}\sin 3t,$$

$$\frac{3}{(s + 2)^2 + 9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t}\sin 3t$$

och
$$\frac{3}{(s + 2)^2 + 9}\,e^{-s\pi} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2(t-\pi)}\sin 3(t - \pi)\,u(t - \pi),$$

där $u(t)$ är enhetssprånget (”the unit step function”).
Man får

$$\textbf{Svar: } y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}\,e^{-2t}\sin 3t + e^{-2(t-\pi)}\sin 3(t - \pi)\,u(t - \pi).$$

3. *Skrivvariant I*: Enligt uppgiften är

$$x(t) = \begin{cases} e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ e^{-2t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}$$

Funktionen är uppenbarligen kontinuerlig då $t \neq 0$ och kan göras kontinuerlig också då $t = 0$, eftersom höger- och vänstergränsvärdena av x då $t \to 0$ båda är $= e^{0} = 1$. Den generaliserade derivatan är därför

$$x'(t) = \begin{cases} e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ -2e^{-2t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}$$

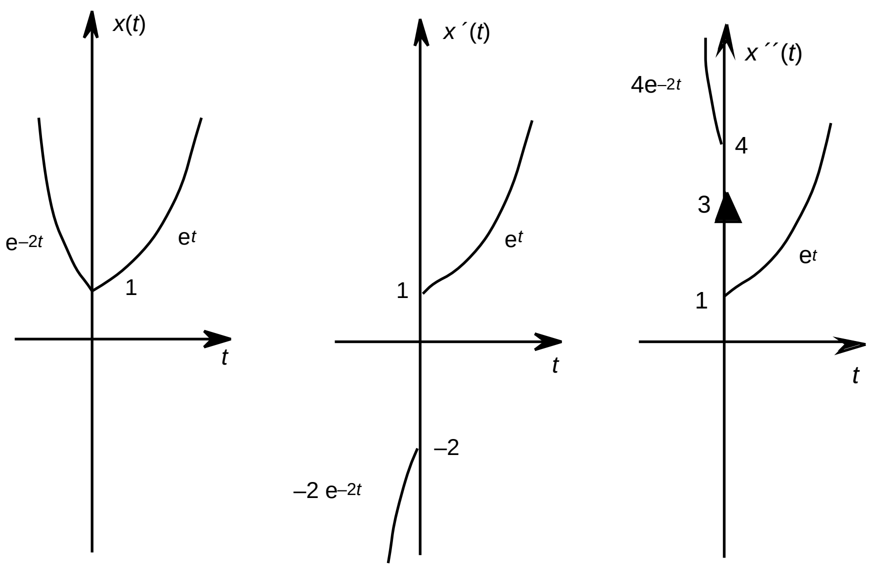
Denna är ”klassiskt” deriverbar då $t \neq 0$ och har ett språng för $t = 0$ eftersom högergränsvärdet är $= e^{0} = 1$ och vänstergränsvärdet $= -2e^{0} = -2$. Språnghöjden är $+3$. Detta ger

$$x''(t) = \left.\begin{cases} e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ 4e^{-2t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}\right\} + 3\delta(t)$$

och $$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = \left.\begin{cases} e^{t} + e^{t} - 2e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ 4e^{-2t} - 2e^{-2t} - 2e^{-2t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}\right\} + 3\delta(t) = 3\delta(t).$$

Svar: $x'(t) = \begin{cases} e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ -2e^{-2t}, & \text{då } t < 0, \end{cases}$ $\quad x''(t) = \left.\begin{cases} e^{t}, & \text{då } t > 0, \\ 4e^{-2t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}\right\} + 3\delta(t),$

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3\delta(t).$$



Skrivvariant II: ”Vanlig” kalkyl med derivator tillsammans med att

$$u'(t) = \delta(t) \text{ och } \delta(t) = \delta(-t) \text{ ger}$$

$$x'(t) = \left[\text{Produktregeln}\right] = e^{t}\, u(t) + e^{t}\, \delta(t) - 2e^{-2t}u(-t) + e^{-2t}\,(-\,\delta(t)).$$

Med tanke på att $y(t)\delta(t) = y(0)\,\delta(t)$ om y är kontinuerlig för $t = 0$, så förenklas detta till att

$$x'(t) = e^{t}\, u(t) + \delta(t) - 2e^{-2t}u(-t) - \delta(t) = e^{t}\, u(t) - 2e^{-2t}u(-t)$$

På samma sätt får man andraderivatan:

$$x''(t) = e^{t}\, u(t) + e^{t}\, \delta(t) + 4e^{-2t}u(-t) - 2e^{-2t}(-\delta(t)) = e^{t}\, u(t) + 4e^{-2t}u(-t) + 3\delta(t),$$

varav

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = (e^{t} + e^{t} - 2e^{t})u(t) + (4e^{-2t} - 2e^{-2t} - 2e^{-2t})u(-t) + 3\delta(t) = 3\delta(t).$$

Svar: $x'(t) = e^{t}\, u(t) - 2e^{-2t}u(-t)$, $x''(t) = e^{t}\, u(t) + 4e^{-2t}u(-t) + 3\delta(t)$,

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3\delta(t).$$

4a. $$s(t) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,e^{i\pi nt} = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,e^{i\pi nt} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2}\,e^{i\pi nt} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\,e^{i\pi nt} + \frac{1}{(-n)^2}\,e^{-i\pi nt}\right) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,(e^{i\pi nt} + e^{-i\pi nt}) =$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos \pi nt \;:\textbf{Svar}$$

Alternativt kan man använda de generella omräkningssambanden (se formelbladet):

I det här fallet är $c_n = \frac{1}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = -\frac{\pi^2}{3}$

varav för $n \geq 0$: $a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = \frac{2}{n^2}$, då $n \geq 1$ och $a_0 = -\frac{\pi^2}{3}$

och för $n \geq 1$: $b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = 0$,

viket insatt i $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \pi nt + b_n \sin \pi nt)$,

ger svaret ovan.

4b. $s(t)$ är en jämn funktion eftersom summan enligt 4a är en cosinusserie. För $-1 < t < 0$ gäller då

$$s(t) = s(-t) = \left[0 < -t < 1\right] = \frac{\pi^2}{2}(-t)(-t-2) = \frac{\pi^2}{2}\,t(t+2).$$

Svar: $s(t) = \frac{\pi^2}{2}\,t(t+2)$ för $-1 < t < 0$.

4c. $s(t)$ är 2-periodisk (eftersom $e^{i\pi n(t-2)} = e^{i\pi nt}$). Alltså

$$s(7/2) = s(7/2-4) = s(-1/2) = \left[\text{Enligt 4b}\right] = \frac{\pi^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right) = -\frac{3\pi^2}{8}.$$

Svar: $-\frac{3\pi^2}{8}$.

5a. Vi använder egenvärdesmetoden.

Systemets matris: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Dess egenvärden: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 6$ eller -2.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u - v = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och till egenvärdet $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3u + 5v = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Funktionerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{6t}$ och $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}e^{-2t}$ utgör två linjärt oberoende reella lösningar till det homogena systemet. Dess allmänna lösning kan därför skrivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{6t} + B\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}e^{-2t} = \boldsymbol{F}(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

där $\boldsymbol{F}$ är fundamentalmatrisen $\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{6t} & 5e^{-2t} \\ e^{6t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Begynnelsevärdet $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = [\boldsymbol{F}(0)]^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och lösningen
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}e^{6t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}e^{-2t},$$

Svar: $x(t) = 3e^{6t} + 5e^{-2t}$, $y(t) = 3e^{6t} - 3e^{-2t}$.

5b. Enligt (*) ovan och på grund av att $\lim_{t \to \infty} e^{6t} = \infty$ och $\lim_{t \to \infty} e^{-2t} = 0$, så är $\lim_{t \to \infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \infty$, såvida inte $A = 0$, då gränsvärdet istället $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är då

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}e^{-2t} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $x(0) = 5B$, $y(0) = -3B$, där B är en godtycklig konstant.

Anmärkning: Uppgiften 5 kan också lösas med hjälp av Laplacetransformering – egenvärdesmetoden är dock att föredra i b-uppgiften.

5a. Laplacetransformering (t.ex. med hjälp av β) ger

$$\begin{cases} sX(s) - 8 = X(s) + 5Y(s) \\ sY(s) = 3X(s) + 3Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-1 & -5 \\ -3 & s-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s-3 & 5 \\ 3 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (**)$$

där $\Delta = (s-1)(s-3) - 15 = s^2 - 4s - 12 = (s-6)(s+2)$.

Alltså
$$X(s) = \frac{8(s-3)}{(s-6)(s+2)} = [\text{Partialbråksuppd.}] = \frac{3}{s-6} + \frac{5}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = 3e^{6t} + 5e^{-2t},$$
$$Y(s) = \frac{24}{(s-6)(s+2)} = [\text{Partialbråksuppd.}] = \frac{3}{s-6} - \frac{3}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 3e^{6t} - 3e^{-2t},$$

dvs svar som ovan.

5b. Relationen vid (**) kommer istället att vara

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s-3 & 5 \\ 3 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

vilket innebär att både $X(s)$ och $Y(s)$ kommer att ha formen $\frac{p(s)}{(s-6)(s+2)}$ och $\frac{q(s)}{(s-6)(s+2)}$ där p och q är polynom av grad ≤ 1. Partialbråksuppdelning ger sedan

$$X(s) = \frac{p(s)}{(s-6)(s+2)} = [\text{"Handpåläggning"}] = \frac{p(6)}{(s-6)\cdot 8} + \frac{p(-2)}{(-8)\cdot(s+2)}$$

och motsvarande för $Y(s)$.

Eftersom $\frac{1}{s-6} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{6t}$, som $\to \infty$ då $t \to \infty$ och $\frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t}$, som $\to 0$ då $t \to \infty$, så går lösningarna $x(t)$ och $y(t)$ mot 0 om och endast om $p(6) = q(6) = 0$, Konstanterna c och d måste alltså väljas så att

$$\left.\begin{pmatrix} s-3 & 5 \\ 3 & s-1 \end{pmatrix}\right|_{s=6}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \; B \text{ konstant.} \qquad \blacksquare$$

6. Om $X(\omega)$ betecknar fouriertransformen till $x(t)$ så kommer den filtrerade signalen, $\hat{x}(t)$, att ha fouriertransformen

$$\hat{X}(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{då } |\omega| < 100\pi, \\ 0, & \text{då } |\omega| > 100\pi. \end{cases}$$

(Obs att 1 Hz = 1 varv/s = 2π radianer/s.)

Enligt Parsevals relation är energin hos signalen $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

och hos den filtrerade signalen $\hat{x}(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-100\pi}^{100\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega .$$

Den andel av energin som går förlorad vid filtreringen kan därför tecknas som

$$\frac{\displaystyle\int_{|\omega|>100\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega} .$$

Vi bestämmer nu $X(\omega)$: I en fouriertransformtabell kan man ex.vis hitta att

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} . \qquad (a > 0).$$

Enligt dualitetsprincipen är då

$$\frac{2a}{a^2 + t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \, e^{-a|-\omega|} = 2\pi \, e^{-a|\omega|} ,$$

dvs (multiplicera med $a/2$): $\qquad \dfrac{1}{1 + (t/a)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} a\pi \, e^{-a|\omega|}.$

I vårt fall är $a = 1/100$: $\qquad \dfrac{1}{1 + (100t)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{\pi}{100} e^{-|\omega|/100}$

och förhållandet mellan integralerna ovan är =

$$\frac{(\pi/100)^2 \displaystyle\int_{|\omega|>100\pi} e^{-|\omega|/50} \, d\omega}{(\pi/100)^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|/50} \, d\omega} = \frac{\displaystyle\int_{100\pi}^{\infty} e^{-\omega/50} \, d\omega}{\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\omega/50} \, d\omega} = \frac{e^{-2\pi}}{1} \approx 0{,}19\%.$$

Svar: $e^{-2\pi} \approx 0{,}19\%$.

7. (Variabelseparation)

Ansätts att $\qquad u(x,t) = X(x)\,T(t), \qquad (X \text{ och } T \neq 0),$

övergår ekvationen i $\qquad X'T - XT = 2XT',$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{X' - X}{2X} = \frac{T'}{T} = k \text{ (oberonde av } x \text{ och av } t).$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} X' = (2k+1)X, \\ T' = k\,T. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad X(x) = C\,e^{(2k+1)x},\ T = D\,e^{kt}.$$

Funktioner av typen $u(x,t) = C\,e^{(2k+1)x + kt}$, där C och k är konstanter, satisfierar alltså den givna ekvationen. Eftersom differentialekvationen är homogen så gäller detsamma om alla linjära kombinationer av denna typ av funktioner.

Begynnelsevillkoret är också uppfyllt om $C_{1,2}$ och $k_{1,2}$ kan väljas så att

$$u(x, 0) = C_1\, e^{(2k_1 + 1)x} + C_2\, e^{(2k_2 + 1)x} = 6\, e^{-3x} + 3\, e^{-5x} \text{ för alla } x.$$

Så är tydligen fallet om

$C_1 = 6$, $2k_1 + 1 = -3$, dvs. $k_1 = -2$ och $C_1 = 3$, $2k_1 + 1 = -5$, dvs. $k_2 = -3$. Detta ger

Svar: $u(x,t) = 6\, e^{-3x-2t} + 3\, e^{-5x-3t}$.

8a. Sätter man $y(t) = \frac{a}{b}\, Y(t)$, så är $y'(t) = \frac{a}{b}\, Y'(t)$ och ekvationen övergår i

$$\frac{a}{b}\, Y'(t) = -a\frac{a}{b}\, Y(t) + b\frac{a^2}{b^2} Y^2(t) - c\frac{a^3}{b^3} Y^3(t),$$

Multiplicera med $\frac{b}{a}$, bryt ut $-aY$ i höger led:

$$Y' = -aY\left(1 - Y + c\frac{a}{b^2} Y^2\right) = -aY(1 - Y + \rho Y^2),$$

där $\rho = \frac{ac}{b^2}$.

8b. Ekvationen är autonom, dess jämviktslösningar är de ickenegativa nollställena till polynomet $P(Y) = -aY(1 - Y + \rho Y^2)$.

Ekvationen $Y(1 - Y + \rho Y^2) = 0$ har rötterna $Y_1 = 0$, $Y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$.

I. Om $\rho > 1/4$ är $Y_{2,3}$ icke-reella och differentialekvationen har bara en jämviktslösning, $Y_1 = 0$. Att denna är stabil framgår av att $P(Y) < 0$ för alla $Y > 0$.

(Obs t.ex. att $-aY < 0$, medan $1 - Y + \rho Y^2 > 0$ eftersom det polynomet saknar reella nollställen och är $= 1 > 0$, då $Y = 0$.)

$P(Y) = dY/dt$	0	$-$	
Y	0	$\swarrow$	∞

Lodjuren dör alltså ut oavsett startpopulationens storlek.

II. Om $0 < \rho < 1/4$ är $Y_1 = 0$, $Y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$ och $Y_3 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$ alla reella och eftersom $0 < \sqrt{1 - 4\rho} < 1$, så är

$$Y_1 < Y_2 < Y_3.$$

Differentialekvationen har tre olika jämviktslösningar. Teckenstudiet av $P(Y)$:

$P(Y) = dY/dt$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Y	$Y_1 = 0$	$\swarrow$	Y_2	$\searrow$	Y_3	$\swarrow$	∞

visar att vi då har en stabil positiv jämviktspopulation för $Y = Y_3 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$.

(Observera t.ex. att polynomet $P(Y)$ måste växla tecken i nollställena, eftersom dessa är enkla.)

För dessa värden på ρ behöver lodjuren alltså inte dö ut. Brytpunkten $\rho = 1/4$ är det efterfrågade ρ_0-värdet.

Svar: $\rho_0 = 1/4$.

8c. Av det andra teckendiagrammet ovan framgår att $\lim_{t \to \infty} Y(t) = 0$ om lösningens startvärde är $< Y_2$, medan $\lim_{t \to \infty} Y(t) = Y_3$ om startvärdet $> Y_2$. Populationen dör alltså ut resp. går mot en stabil positiv jämvikt allteftersom startpopulationen är $< Y_2$ resp. $> Y_2$. Det efterfrågade tröskelvärdet är alltså $\frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$.

Svar: $Y_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho}}{2\rho}$.