Institutionen för matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 20 april 2005, kl 8.00 – 13.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, Kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

Fordringar: Inklusive bonus krävs för betyget 3 minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p.

Gör hänvisningar till β eller formelblad där Du använder dem.

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Differentialekvationen

$$y'' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 0,\ x > 0,$$

har bl.a. $y = e^x$ och $y = x^2e^x$ som lösningar. Använd detta faktum för att bestämma den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 2x\,e^x,\ \ x > 0.$$ (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Bestäm funktionen $y(t)$, så att den för $t \geq 0$ uppfyller att

$$y'' + 4y' + 13y = 3\,\delta(t - \pi), y(0) = 1 \text{ och } y'(0) = 0.$$ (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Låt $$x(t) = e^t\,u(t) + e^{-2t}\,u(-t),$$
där $u(t)$ är ”enhetssprånget”, $\begin{cases} 1, \text{ då } t > 0, \\ 0, \text{ då } t < 0. \end{cases}$
Beräkna de generaliserade 1:a- och 2:a-derivatorna till $x(t)$ och förenkla så långt som möjligt

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t).$$ (3p)

4. Givet att $$s(t) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,e^{i\pi n t}.$$

a. Vilken är den reella fourierserieutvecklingen av $s(t)$? (1p)

b. I ett tabellverk hittar man att $s(t) = \frac{\pi^2}{2}\,t\,(t - 2)$ för $0 < t < 1$. (Detta behöver inte verifieras.)
Ge en motsvarande formel för summan då t ligger i intervallet $-1 < t < 0$? (1p)

c. Beräkna det exakta värdet av $s(7/2)$. (1p)

Motivera noga Dina svar!

5. a. Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ så att

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 5\,y(t), \\ y'(t) = 3\,x(t) + 3\,y(t), \end{cases}$$

och $$x(0) = 8, y(0) = 0.$$ (2p)

b. Hur skall begynnelsevillkoren $x(0) = c, y(0) = d$ väljas för att lösningen skall uppfylla villkoret $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0?$$ (1p)

Var god vänd!

6. Signalen

$$x(t) = \frac{1}{1 + (100t)^2}\text{ , } t \text{ mätt i sekunder,}$$

bearbetas i ett idealt lågpassfilter, vars enda inverkan är att det filtrerar bort alla frekvenser f med $|f| > 50$ Hz. Hur stor andel av energin har därvid gått förlorad?

Energin hos signalen $x(t)$ ges av

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt. \qquad \text{(5p)}$$

7. Bestäm en lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u = 2\frac{\partial u}{\partial t}\text{ , } x > 0,\ t > 0,$$

för vilken $u(x, 0) = 6\,e^{-3x} + 3\,e^{-5x}$. (5p)

8. Tillväxthastigheten hos en lodjurspopulation inom ett visst område antas bero på tre omständigheter:

1° En dödlighet (mätt i individer per tidsenhet) proportionell mot populationens storlek, orsakad av ålder, sjukdom och olyckor.

2° Antalet födda per tidsenhet, som grovt sett är proportionellt mot sannolikheten för en parning vid tidpunkten, vilken i sin tur är proportionell mot sannolikheten för att två lodjur av olika kön träffar på varandra. Den sannolikheten kan uppskattas vara proportionell mot kvadraten på populationens storlek.

3° En dödlighet som beror på interna strider av ”triangeldramatyp”. Denna kan grovt anses vara proportionell mot sannolikheten för att tre individer befinner sig på samma plats, dvs mot kuben på populationens storlek.

Om $y(t)$ är populationens storlek som funktion av tiden t och dödligheten av det förstnämnda slaget är $-ay$ ($a > 0$ och av dimension 1/tidsenhet), antalet nyfödda per tidsenhet är by^2 ($b > 0$ och av dimension 1/(tid·antal)) samt dödligheten av det sistnämnda slaget ovan är $-cy^3$ ($c > 0$ och av dimension 1/(tid·antal^2)), så får man som modell för populationsutvecklingen:

$$y' = -ay + by^2 - cy^3, y \geq 0.$$

a. Verifiera att man kan transformera ekvationen till en enklare:

$$Y' = -aY(1 - Y + \rho Y^2), Y \geq 0,$$

genom att införa den dimensionslösa variabeln $Y(t) = \frac{b}{a}\,y(t)$ och den dimensionslösa storheten $\rho = \frac{ac}{b^2}$. (1p)

b. Visa att det finns ett värde, ρ_0, på storheten ρ sådant att lodjuren säkert dör ut om $\rho > \rho_0$, men inte behöver göra det om $\rho < \rho_0$. Ange också detta värde. (3p)

c. Visa att om $\rho < \rho_0$, så kommer populationen att gå mot en positiv jämvikt eller att dö ut, beroende på om Y från början ligger över ett visst tröskelvärde Y_0 eller ej. Ange Y_0 som funktion av ρ. (1p)

(Differentialekvationen behöver inte lösas. Du får använda resultatet från a-delen även om Du inte löst den uppgiften.)

Lycka till!