Institutionen för matematik
KTH

Lösningsskisser till tenta 050830, 5B1207. Differentialekvationer II för T2

1a. Vi använder egenvärdesmetoden.

Systemets matris: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dess egenvärden: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$ eller 6.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och till egenvärdet $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2u - 3v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Funktionerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t}$ utgör två linjärt oberoende reella lösningar till det homogena systemet. Dess allmänna lösning kan därför skrivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t}$$: **Svar**

1b. För konstantlösningar (och endast dessa) är $x'(t) = y'(t) = 0$, vilket i det här fallet ger villkoren:

$$\begin{cases} 0 = 4x + 3y - 1, \\ 0 = 2x + 3y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

Svar: Konstantlösningar är $x = 4$ och $y = -5$.

Allmän lösning: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t}$

2. Integralen i högra ledet är en Laplacefaltning, ekvationen kan därför skrivas

$$f'(t) = \sin t + f(t) * \cos t$$

Laplacetransformering ger:

$$sF(s) - f(0) = \frac{1}{1+s^2} + F(s)\cdot\frac{s}{1+s^2}.$$

Eftersom $f(0) = 1$ kan detta efter multiplikation med $1 + s^2$ skrivas om till

$$s(s^2+1)F(s) = 1 + s^2 + 1 + sF(s)$$

$$\Leftrightarrow s^3F(s) = s^2 + 2 \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3}$$

Med hjälp av att

$$\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1$$

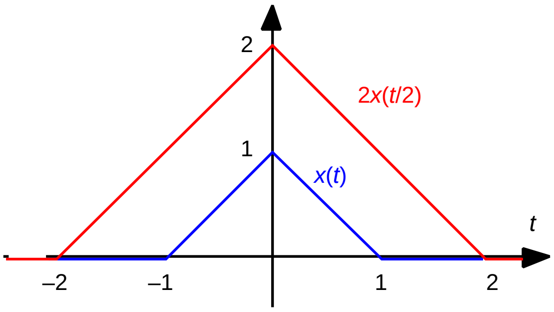
och

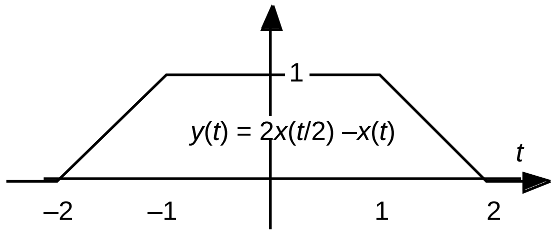
$$\frac{2}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^2$$

får man sedan

Svar: $f(t) = 1 + t^2$.

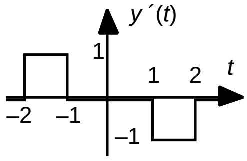
3. Grafen för $y(t)$ kan konstrueras ur de för $x(t)$ och $2x(t/2)$:





och man får att
$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| > 2, \\ 1, & \text{då } |t| < 1, \\ 2 + t, & \text{då } -2 < t < -1, \\ 2 - t, & \text{då } 1 < t < 2. \end{cases}$$

varav
$$y'(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| < 1 \text{ eller } |t| > 2, \\ 1, & \text{då } -2 < t < -1 \\ -1, & \text{då } 1 < t < 2. \end{cases}$$



och
$$y''(t) = \{0\} + \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$$

Fouriertransformering av den senaste relationen ger
$$(i\omega)^2\, Y(\omega) = e^{2i\omega} - e^{i\omega} - e^{-i\omega} + e^{-2i\omega} = 2\cos 2\omega - 2\cos\omega,$$

dvs.
$$Y(\omega) = 2\,\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\omega^2}, \quad (Y(0) = 3).$$

(Värdet av $Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt$ = [Arean under y:s graf], kan avläsas i den andra figuren ovan)

Svar: $y'(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| < 1 \text{ eller } |t| > 2, \\ 1, & \text{då } -2 < t < -1 \\ -1, & \text{då } 1 < t < 2. \end{cases}$ $\qquad y''(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$

$$Y(\omega) = 2\,\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\omega^2}, \quad (Y(0) = 3)$$

4. Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. Med koefficienten 1 framför y'-termen får den formen
$$y' + \frac{4x}{1+x^2}\,y = \frac{x}{1+x^2}. \qquad (*)$$

Integrerande faktor är
$$\exp\left(\int \frac{4x}{1+x^2}\,dx\right) = \exp\left(2\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^2.$$

Multipliceras ekavationen (*) med denna faktor får man
$$((1+x^2)^2 y)' = x(1+x^2) = x + x^3,$$

varav
$$(1+x^2)^2 y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4 + 2x^2}{4} + C.$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu

$$4 \cdot 1 = \frac{3}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{13}{4}.$$

och

$$\textbf{Svar: } y = \frac{x^4 + 2x^2 + 13}{4(1+x^2)^2}.$$

5. Pulssvaret till två seriekopplade system är (fourier-)faltningen av delsystemens pulsvarsfunktioner och ett systems utsignal är faltningen av pulssvarsfunktionen och insignalen. I det har fallet skall vi alltså beräkna

$$y(t) = (e^{-t}\, u(t)) * (e^{t} u(-t)) * e^{-2|t|}.$$

Enligt faltningssatsen är fouriertransformen $Y(\omega)$ av $y(t)$ produkten av de olika faktorernas transformer. Vi vet att

$$e^{-t}\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + i\omega},$$

$$e^{t}\, u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - i\omega},$$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \qquad (a > 0),$$

varför $$Y(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} \cdot \frac{1}{1-i\omega} \cdot \frac{4}{4+\omega^2} = \frac{4}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{4}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = \frac{4}{3}\frac{1}{(1+\omega^2)} - \frac{4}{3}\frac{1}{(4+\omega^2)} = \frac{2}{3}\frac{2\cdot 1}{(1^2+\omega^2)} - \frac{1}{3}\frac{2\cdot 2}{(2^2+\omega^2)}$$

och återtransformering $$y(t) = \frac{2}{3} e^{-|t|} - \frac{1}{3} e^{-2|t|}.$$

Svar: Utsignalen blir $\frac{2}{3} e^{-|t|} - \frac{1}{3} e^{-2|t|}$.

6. De komplexa π-periodiska fourierserierna har formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2int}.$$

I det här fallet är

$$x(t) = \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{3it}\cdot e^{-it} + 6e^{2it}\cdot e^{-2it} - 4e^{it}\cdot e^{-3it} + e^{-4it}}{2^4 i^4} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{16}}_{c_2} e^{4it} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{c_1} e^{2it} + \underbrace{\frac{3}{8}}_{c_0} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{c_{-1}} \cdot e^{-2it} + \underbrace{\frac{1}{16}}_{c_{-2}} e^{-4it}.$$

och man avläser

Svar: $\sin^4 t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2int}$, där $c_n = 0$ om $|n| \geq 3$, $c_{\pm 2} = \frac{1}{16}$, $c_{\pm 1} = -\frac{1}{4}$ och $c_0 = \frac{3}{8}$.

7. Med ansatsen $$u(x,t) = X(x)\, T(t), \qquad (X \text{ och } T \neq 0),$$

övergår ekvationen i $$X''T + X'T - XT'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{X'' - X'}{X} = \frac{T''}{T} = k \text{ (oberonde av } x \text{ och av } t\text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} X'' + X' - kX = 0, & X(x) \neq 0, \ldots[1] \\ T'' - kT = 0. & T(t) \neq 0, \ldots[2] \end{cases}$$

Randvillkoren innebär för ansatsfunktionernas del:

$$u(0, t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \quad [T \neq 0] \quad X(0) = 0, \ldots[3]$$
$$u(\pi, t) = X(\pi)\cdot T(t) = 0 \quad [T \neq 0] \quad X(\pi) = 0, \ldots[4]$$
$$u(x, 0) = X(x)\cdot T(0) = 0 \quad [X \neq 0] \quad T(0) = 0, \ldots[5]$$

Ekvationerna [1] och [2] är linjära med konstanta koefficienter. De karakteristika rötterna till [1] är $\lambda^2 + \lambda - k = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \mu$,

där vi satt $\frac{\sqrt{1-4k}}{2} = \mu$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen [1] är därför

$$X(x) = e^{-x/2}\,(A\,e^{\mu x} + Be^{-\mu x}),\ (A \text{ och } B \text{ godtyckliga konstanter}),$$

med undantag för det fall då $\mu = 0$ (dvs. $k = 1/4$), då lösningen istället är

$$X(x) = e^{-x/2}\,(A\,x + B).$$

Begynnelsevillkoret [3] ger för $\mu \neq 0$, $A + B = 0$ $\quad X(x) = A\,e^{-x/2}\,(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$
och villkoret [4]

$$A\,e^{-\pi/2}\,(e^{\pi\mu} - e^{-\pi\mu}) = 0 \Leftrightarrow [A \neq 0, \text{ ty } X(x) \neq 0] \Leftrightarrow e^{2\pi\mu} = 1 \Leftrightarrow \mu = in,$$

där n är ett godtyckligt heltal, varav

$$X(x) = A\,e^{-x/2}\,(e^{inx} - e^{-inx}) = C\,e^{-x/2}\sin nx,\ (C = 2iA \text{ och } n \neq 0).$$

För det fall att $\mu = 0$ ger [3] och [4] att $B = A = 0$, vilket inte är förenligt med att $X(x) \neq 0$.
Lösningar till [1], [3] och [4] finns alltså om och endast om

$$\frac{\sqrt{1-4k}}{2} = in \Leftrightarrow k = \frac{1}{4} + n^2,\ n \neq 0.$$

Ekvationen [2] får i dessa fall formen

$$T'' - (1/4 + n^2)T = 0,$$

med allmän lösning $\quad T(t) = D\,e^{\sqrt{1/4 + n^2}\,t} + E\,e^{-\sqrt{1/4 + n^2}\,t}$
och villkoret[5] till slut att $D + E = 0$, dvs

$$T(t) = D\,\left(e^{\sqrt{1/4 + n^2}\,t} - e^{-\sqrt{1/4 + n^2}\,t}\right) \left(= 2D \sinh\sqrt{1/4 + n^2}\,t\right).$$

Svar: $u(x, t) = C_n\ e^{-x/2}(\sin nx)\cdot\left(e^{\sqrt{1/4 + n^2}\,t} - e^{-\sqrt{1/4 + n^2}\,t}\right)$

$= 2C_n\ e^{-x/2}\sin nx\ \sinh\sqrt{1/4 + n^2}\,t$, n heltal $\neq 0$, C_n godtyckliga konstanter.

8a. $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} \sin \pi t\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} (e^{\pi i t} - e^{-\pi i t})\,e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} (e^{i(\pi-\omega)t} - e^{i(-\pi-\omega)t})\,dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i(\pi-\omega)t}}{i(\pi-\omega)}\right]_{t=-1}^{1} - \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i(-\pi-\omega)t}}{i(-\pi-\omega)}\right]_{t=-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{-e^{-i\omega} - (-e^{i\omega})}{\pi-\omega} - \frac{1}{2}\,\frac{-e^{-i\omega} - (-e^{i\omega})}{\pi+\omega} = -i\sin\omega\left(\frac{1}{\pi-\omega} + \frac{1}{\pi+\omega}\right) =$$

$$= -i\sin\omega\,\frac{2\pi}{\pi^2-\omega^2} = 2\pi i\,\frac{\sin\omega}{\omega^2-\pi^2}.$$

(Alternativt kan man derivera $x(t)$ två ggr och därav se att $x'' + \pi^2 x = -\pi\delta(t+1) + \pi\delta(t-1)$.
Fouriertransformering av detta ger direkt $(-\omega^2 + \pi^2)\,X(\omega) = \pi(-e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = -2\pi i \sin\omega$.)

Svar: $X(\omega) = 2\pi i\,\frac{\sin\omega}{\omega^2-\pi^2}$.

8b. Tillämpas Parsevals relation: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$ på funktionerna i a-uppgiften får man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{1} \sin^2 \pi t \, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1 - \cos \pi t}{2} \, dt = 1 + \left[\frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_{-1}^{1} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|2\pi i|^2 \sin^2 \omega}{(\omega^2 - \pi^2)^2} \, d\omega = 4\pi^2 I ,$$

där I är den sökta integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu}{(\nu^2 - \pi^2)^2} \, d\nu$. Alltså

$$1 = \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi^2 I \iff I = \frac{1}{2\pi}.$$

Svar: $\frac{1}{2\pi}$