Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen , 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 30 augusti 2005, kl 8.00 – 13.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p*)

   a. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t). \end{cases} \qquad (2p)$$
   b. Bestäm några konstanta funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som satisfierar det inhomogena systemet
$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 3y(t) - 1, \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 7 \end{cases}$$
   och ange sedan den allmänna lösningen till detta system. (1p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p*)
   Bestäm med hjälp av Laplacetransformering en funktion $f(t)$ som satisfierar ekvationen
$$f'(t) = \sin t + \int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau,\ t \geq 0 \text{ och } f(0) = 1. \qquad (3p)$$

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p*)
   Funktionen $x(t)$ definieras av
$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1. \end{cases}$$
   Beräkna de generaliserade 1:a- och 2:a-derivatorna till
$$y(t) = 2\,x(t/2) - x(t).$$
   Ange sedan fouriertransformen av $y(t)$. (3p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$(1 + x^2)y' + 4xy = x,\ y(1) = 1. \qquad (3p)$$

5. Två linjära tidsinvarianta system har pulssvarsfunktionerna $e^{-t}\,u(t)$ respektive $e^{t}u(-t)$,
   där $u(t)$ är ”enhetssprånget”, $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } t > 0, \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases}$
   De sammansätts (seriekopplas) till ett nytt system. Vilken utsignal producerar detta om insignalen är $e^{-2|t|}$? (3p)

6. Bestäm koefficienterna i den π-periodiska *komplexa* fourierserien av
$$x(t) = \sin^4 t. \qquad (5p)$$

Var god vänd!

7. Bestäm de lösningar till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \; 0 \le t.$$

som har formen $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ och som uppfyller rand- och begynnelsevillkoren

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \; u(x, 0) = 0.$$ (5p)

8. Låt

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & \text{då } |t| \le 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1. \end{cases}$$

a. Bestäm fouriertransformen till $x(t)$. (3p)

b. Beräkna med ledning av svaret i a. det exakta värdet av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{(v^2 - \pi^2)^2} \, dv.$$ (2p)

Lycka till!