Lösningar till tentamen 5B1207, differentialekv. II för T2
060419

(1.) Ekvationen är linjär, homogen och av ordning 2. Dess allmänna lösning har då formen $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ där y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar. Vi känner till en lösning

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

För att hitta ytterligare lösningar sätter vi

$$y = y_1 \cdot z = \frac{1}{x} \cdot z$$

och får $y' = \frac{1}{x} z' - \frac{1}{x^2} z$, $y'' = \frac{1}{x} z'' - \frac{2}{x^2} z' + \frac{2}{x^3} z$,

vilket insatt i ekvationen ger

$$0 = x\left(\frac{1}{x} z'' - \frac{2}{x^2} z' + \frac{2}{x^3} z\right) + (2-x)\left(\frac{1}{x} z' - \frac{1}{x^2} z\right) - \frac{1}{x} z =$$

$$= z'' + \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x} - 1\right) z' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) z = z'' - z'.$$

Men detta är en linjär ekvation med konstanta koefficienter. Dess karakteristiska polynom, $r^2 - r$, har 0-ställena 0 och 1, varför z-ekvationens allmänna lösning är:

$$z = A + Be^x, \quad \text{varav} \quad y = (A + Be^x)\frac{1}{x}$$

Detta ger

Svar: $y = A \cdot \frac{1}{x} + B\frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

(2.) Notera att $x(t) = \dfrac{2t-1}{(t^2-t+1)^2} = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{t^2-t+1}\right)$ och

att $\dfrac{1}{t^2-t+1} = \dfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$. Vi har, t.ex. enligt handboken β:

$$\frac{1}{t^2+a^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$\frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \xrightarrow{FT} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|\omega|/2}$$

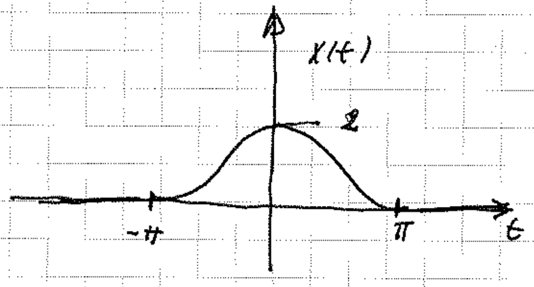
$$\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \xrightarrow{FT} e^{-\frac{i\omega}{2}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}|\omega|}{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t^2-t+1}\right) \xrightarrow{FT} -(i\omega) \cdot e^{-\frac{i\omega}{2}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}|\omega|}{2}}$$

Svar: $-\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} i\omega\, e^{-\frac{\sqrt{3}|\omega| + i\omega}{2}}$

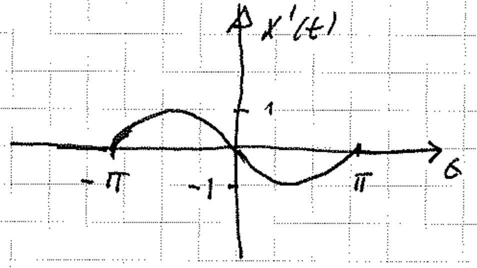
3. a.

$$x(t)=\begin{cases}1+\cos t, & |t|\le\pi\\ 0 & \pi<|t|\end{cases}$$



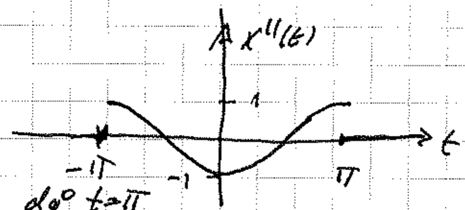
$x(t)$ är kontinuerlig för alla t.

$$x'(t)=\begin{cases}-\sin t & |t|<\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases}$$



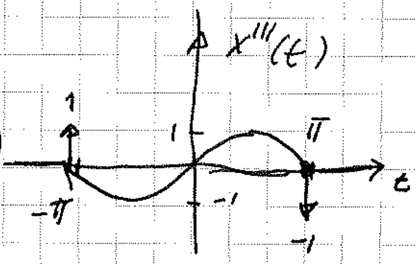
även $x'(t)$ är kontinuerlig för alla t.

$$x''(t)=\begin{cases}-\cos t & |t|<\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases}$$



$x''(t)$ har språng 1 då $t=-\pi$ och -1 då $t=\pi$ och är f.ö. kontinuerlig

$$x'''(t)=\begin{cases}+\sin t & |t|<\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases}+\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi)$$



Vi får $x'''+x'=\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi)$: Svar

b. Fouriertransformering av likheten i svaret i a ger

$$\underbrace{(i\omega)^3}_{-i\omega^3}X(\omega)+(i\omega)X(\omega)=e^{i\pi\omega}-e^{-i\pi\omega}=2i\sin\pi\omega$$

$$\Rightarrow\quad X(\omega)=\frac{2\sin\pi\omega}{\omega-\omega^3},\ \text{då } \omega\neq 0,\ \pm1$$

Värdena för $x=0,\pm1$ kan erhållas ur analysekvationen $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$:

$$X(0)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)dt=2\pi \text{ och } X(\pm1)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)e^{\mp it}dt=$$

$$=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mp it}dt}_{=0}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{\pm it}+1\right)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$$

Svar: $X(\omega)=\dfrac{2\sin\pi\omega}{\omega-\omega^3}$, då $\omega\neq0,\pm1$, $X(0)=2\pi$ och $X(\pm1)=\pi$

4. Ekvationen kan skrivas

$$y'' + 9y = 90\, y * e^{-10t}$$ där $*$ betecknar Laplacefaltningen.

Laplacetransformering, med hänsynstagande till begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$ ger

$$s^2 Y(s) - s - 1 + 9Y(s) = 90\, Y(s) \cdot \frac{1}{s+10}$$

varav $\left(s^2 - \frac{90}{s+10} + 9\right) Y(s) = s+1$, $\Leftrightarrow \underbrace{(s^3 + 10s^2 - 90 + 9s + 90)}_{s(s+9)(s+1)} Y = (s+1)(s+10)$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{(s+1)(s+10)}{s(s+1)(s+9)} = \frac{s+10}{s(s+9)} = \frac{\frac{10}{9}}{s} - \frac{\frac{1}{9}}{s+9}$$

Återtransformering ger

<u>Svar</u>: $y = \frac{10}{9} - \frac{1}{9} e^{-9t}$

---

5. a. Vi har $\frac{1}{\underbrace{9}_{3^2}+t^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega|}$

$$\frac{e^{iat}}{9+t^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega - a|}$$; <u>Svar a</u>

b. Systemets utsignal är $h(t) * x(t) = \frac{\cos t}{9+t^2} * \sin t = y(t)$

Fouriertransformen till denna faltning beräknas först:

$$\sin t \xrightarrow{FT} i\pi\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)$$

$$\frac{\cos t}{9+t^2} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2(9+t^2)} \xrightarrow{FT} [\text{enl. ovan}] \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}\left(e^{-3|\omega-1|} + e^{-3|\omega+1|}\right)$$

Alltså $y(t) \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{6} \cdot i\pi \left(e^{-3|\omega-1|} + e^{-3|\omega+1|}\right) \cdot \left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)$

Men $f(\omega)\delta(\omega - a) = f(a)\delta(\omega - a)$ om f är kontinuerlig för $\omega = a$, alltså är den senaste transformen $=$

$$i\frac{\pi^2}{6}\left(e^{-6} + 1\right)\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right) = \frac{\pi(e^{-6}+1)}{6} \cdot \underbrace{(i\pi)\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)}_{\text{transform av } \sin t}$$

Återtransformering ger nu

$$y(t) = \frac{\pi}{6}(e^{-6}+1)\cdot \sin t \quad : \quad \underline{\underline{\text{Svar b}}}$$

(6.) a. Systemets egenvärden ges av $\begin{vmatrix} 9-\lambda & 25 \\ 3\mu & -\mu^2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \lambda^2 + (\mu^2-9)\lambda - 9\mu^2 - 75\mu = 0$$

Systemet har periodiska lösningar om och endast om egenvärdena är rent imaginära $\Leftrightarrow$ I sambandet

$$\lambda = \frac{9-\mu^2}{2} \pm \sqrt{\frac{9-\mu^2}{2} + 9\mu^2 + 75\mu}$$

måste $9-\mu^2=0$, dvs $\mu=\pm 3$ och uttrycket under rotmärket <0.

För $\mu = 3$ får vi att detta ≥ 0 och för $\mu=-3$ är det $= -9\cdot 16 = -12^2$

Sammanfattningsvis

$$\underline{\text{Svar}}: \mu = -3$$

(b.) Systemets lösningar får för detta μ-värde formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\bar{v}_1 \cdot e^{+\lambda_1 t} + B\bar{v}_2 e^{-\lambda_2 t} = A\bar{v}_1 e^{12it} + B\bar{v}_2 e^{-12it}$$

där $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är motsvarande konstanta egenvektorer.

Motsvarande frekvens uttryckt i KHz utläses nu

$$e^{\pm 12it} = e^{\pm 2\pi i\left(\frac{6}{\pi}\right)t} = e^{\pm 2\pi i f t}$$

dvs $f = \frac{6}{\pi}\text{ KHz} = \frac{6000}{\pi}\text{ Hz}$

$$\underline{\text{Svar}}: \frac{6000}{\pi}\text{ Hz}$$

(c.) Vårt system har formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$ Egenvärdena är enligt ovan $\lambda = \pm 12i$

Motsvarande egenvektorer

$$\lambda=12i: \begin{pmatrix} 9-12i & 25 \\ -9 & -9-12i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3v_1+(3+4i)v_2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4i \\ -3 \end{pmatrix}$$

En komplex lösning är därför:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} i\right) e^{12it} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\cos 12t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 12t\right) +$$

$$+ i\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\sin 12t + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 12t\right)$$

Eftersom systemets koefficienter är reella, så är också real- resp. imaginärdelarna till denna lösning också lösningar.

Systemets allmänna lösning på reell form är därför:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\cos 12t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 12t\right) + B\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\sin 12t + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 12t\right)$$

Begynnelsevärdena $x(0)=1$, $y(0)=3$ är uppfyllda om

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alltså

<u>Svar:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 12t + 7\sin 12t \\ 3\cos 12t - 3\sin 12t \end{pmatrix}$

Alternativt kan man t.ex. Laplacetransformera:

$$\begin{pmatrix} sX-1 \\ sY-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-9 & -25 \\ 9 & s+9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s+9 & 25 \\ -9 & s-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s+84 \\ 3s-36 \end{pmatrix}, \text{ där } \Delta =$$

$$= (s+9)(s-9)+9\cdot 25 = s^2+15^2-9^2 = s^2+12^2$$

Alltså $X = \dfrac{s+84}{s^2+12^2} = \dfrac{s}{s^2+12^2} + 7\cdot\dfrac{12}{s^2+12^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos 12t + 7\sin 12t$

och $Y = \dfrac{3(s-12)}{s^2+12^2} = 3\dfrac{s}{s^2+12^2} - 3\dfrac{12}{s^2+12^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 3\cos 12t - 3\sin 12t$

Svar som ovan

(7.) a. Jämviktslösningarna är de som satisfierar

$$\cos y\,(1+\cos^3 y) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\cos y = 0$ eller $\cos^3 y = -1$

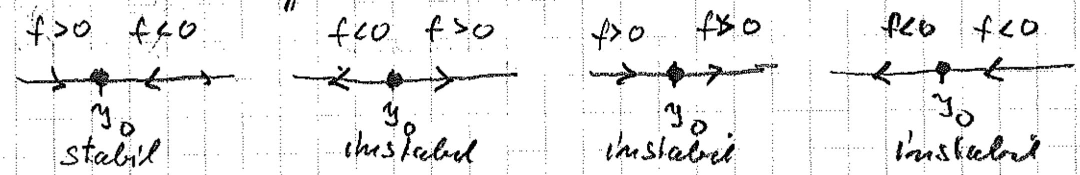
$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\qquad$ $\cos y = -1 \Leftrightarrow y = \pi + 2n\pi$ (n heltal)

Svar: $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ och $y = \pi + 2n\pi$ (n heltal)

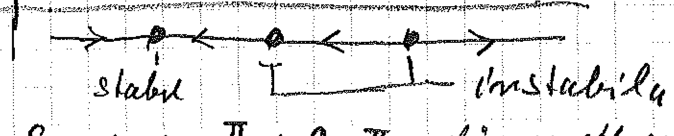
---

b. Vi vet att jämviktslösningen y_0 till $y' = f(y)$ är stabil om f växlar tecken $+\,0\,-$ i y_0 och instabil för övriga teckenändringskombinationer



I vårt fall är f 2π-periodisk varför det räcker att göra ett teckenstudium i $0 \le y \le 2\pi$. Notera att faktorn $(1+\cos^3 y) \ge 0$ för alla y, varför f:s tecken helt bestäms av faktorn $\cos y$

y	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$f(y)$	+		0	−	0	−	0	+	



Svar: $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, där n ett godtyckligt heltal.

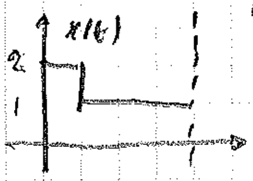
---

c. Begynnelsevärdet 3.15 ligger i intervallet $\pi < y < 3\pi/2$. Enligt diagrammet ovan kommer $y(x)$ att avta mot π då $x \to +\infty$ och växa mot $\frac{3\pi}{2}$ då $x \to -\infty$. Dessa gränsvärden kommer dock inte att antas.

Svar: $\pi < y < 3\pi/2$.

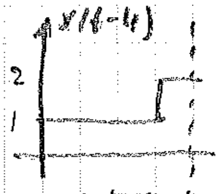
8\. a. Eftersom $y(t)$ är 4-periodisk räcker det att närmare granska summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-4n)$ i t.ex. intervallet $0 \le t \le 4$

Termerna för $n=0$ och 1, $x(t)$ och $x(t-4)$ har i det intervallet graferna



$0 \le t \le 4$

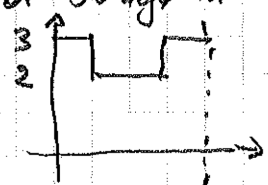
och



$0 \le t \le 4$,

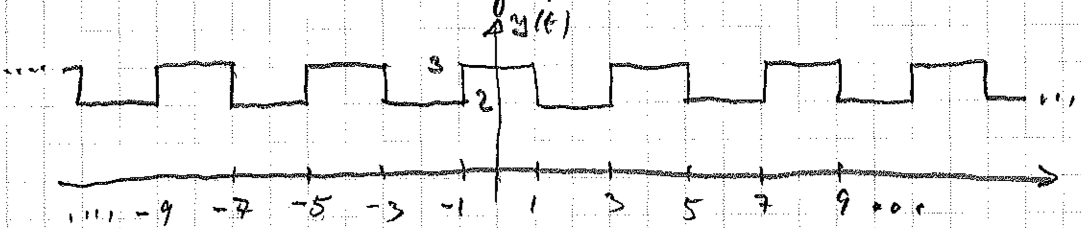
medan $x(t-4n)=0$ i $0 \le t \le 4$ för övriga n-värden.

Alltså är y:s graf i $0 \le t \le 4$:



$0 \le t \le 4$

dvs i sin helhet är grafen:



: Svar a

---

b. Fourierserieutvecklingen av $y(t)$ är $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\pi i n t/2}$

där $c_n = \frac{1}{4} \int_{\langle 4 \rangle} y(t) e^{-\pi i n t/2} dt$, med integrationen utsträckt över ett intervall $\langle 4 \rangle$ av längd 4.

Några varianter på beräkningens genomförande:

I. $4c_n = \int_{-1}^{3} y(t) e^{-\pi i n t/2} dt = \int_{-1}^{1} 3 e^{-\pi i n t/2} dt + \int_{1}^{3} 2 e^{-\pi i n t/2} dt =$

$= [\text{om } n \neq 0] = 3\left[\frac{e^{-\pi i n t/2}}{-\pi i n/2}\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{e^{-\pi i n t/2}}{-\pi i n/2}\right]_{1}^{3} =$

$= \frac{6}{\pi i n}\left(e^{\pi i n/2} - e^{-\pi i n/2}\right) + \frac{4}{i\pi n}\left(e^{-\pi i n/2} - \underbrace{e^{-3\pi i n/2}}_{= e^{\pi i n/2}}\right) =$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(12 \sin\frac{n\pi}{2} - 8 \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi n} \sin\frac{n\pi}{2}$$

Alltså $c_n = \dfrac{\sin n\pi/2}{\pi n}$ om $n \neq 0$

För $n=0$ får man i stället $4c_0 \quad \int_{-1}^{1} 3\,dt + \int_{1}^{3} 2\,dt = 10$

dvs, $c_0 = \dfrac{5}{2}$

Svar b: $c_n = \begin{cases} 5/2, & \text{då } n=0 \\ \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}, & \text{då } n \neq 0 \end{cases}$

Variant II:

Vi vet från fourier-teorin att om

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nP)$, dvs om y är den P-periodiska

fortsättningen av $x(t)$ så är y:s n-te fourierserie-koefficient

$$c_n = \frac{1}{P} X\left(\frac{2\pi n}{P}\right)$$

där $X(\omega)$ är fouriertransformen till x (periodisk fortsättning i tidshänseende motsvarar sampling i frekvenshänseende).

Fouriertransformen av $X(t)$ kan bestämmas t.ex. att man observerar att

$$x'(t) = \delta(t+4) + \delta(t+1) - \delta(t+1) - \delta(t-4)$$

vilket efter fouriertransformering ger

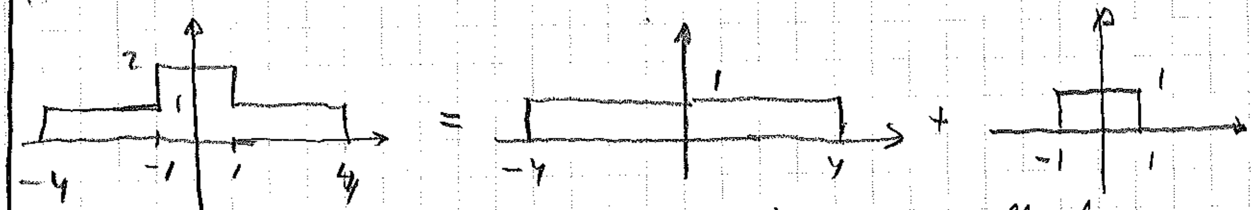
$$i\omega X(\omega) = e^{4i\omega} + e^{i\omega} - e^{-i\omega} - e^{-4i\omega} =$$

$$= 2i(\sin 4\omega + \sin\omega)$$

varav $X(\omega) = 2\,\dfrac{\sin 4\omega + \sin\omega}{\omega}$

(detta för $\omega \neq 0$, för $\omega = 0$ har man $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt =$ [se grafen för x] $= 10$)

Alternativt kan man konstatera att



dvs. att $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{8}\right) + \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$, varav efter fourier-transformering

$$X(\omega) = 8 \,\text{sinc}\, \frac{8\omega}{2\pi} + 2 \,\text{sinc}\, \frac{2\omega}{2\pi} = 8 \,\text{sinc}\, \frac{4\omega}{\pi} + 2 \,\text{sinc}\, \frac{\omega}{\pi}.$$

Vi får nu att

$$c_n = \frac{1}{4} X\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \frac{1}{4} X\left(\frac{n\pi}{2}\right) = [\text{för } n \neq 0]$$

$$= \frac{1}{4} \, 2 \, \frac{\sin(2\pi n) + \sin n\pi/2}{\pi n/2} = \left[\sin 2\pi n = 0\right] = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi}$$

Och för $n=0$: $c_0 = \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{5}{2}$, dvs svar som ovan

Alternativt:

$$c_n = \frac{1}{4}\Big(8 \underbrace{\text{sinc}\, 2n}_{\substack{=1,\, n=0 \\ =0,\, n\neq 0}} + 2 \,\text{sinc} \frac{n}{2}\Big) = \begin{cases} 10/4 = 5/2, & \text{om } n=0 \\ \frac{1}{2} \,\text{sinc}\, \frac{n}{2} = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\pi}, & \text{om } n \neq 0 \end{cases}$$