Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 19 april 2006, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p.

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

Man får veta att $y(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet $x > 0$ är en lösning till differentialekvationen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2 - x)\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Bestäm ekvationens allmänna lösning i intervallet. (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

Beräkna fouriertransformen till

$$x(t) = \frac{2t - 1}{(t^2 - t + 1)^2}. \qquad (3p)$$

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

a. Förenkla så långt som möjligt summan av de generaliserade derivatorna $x'''(t)$ och $x'(t)$, då

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos t, & \text{då } |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{då } \pi < |t|. \end{cases} \qquad (2p)$$

b. Bestäm *med ledning av svaret i a-uppgiften* fouriertransformen av $x(t)$. (1p)

4. Lös ekvationen

$$y'' + 9y = 90\int_0^t y(t - \tau)\,e^{-10\tau}\,d\tau, \text{ då } y(0) = y'(0) = 1. \qquad (3p)$$

5. a. Bestäm fouriertransformen till

$$f(t) = \frac{e^{iat}}{9 + t^2}, \text{ där } a \text{ är en reell konstant.} \qquad (1p)$$

b. Ett LTI-system har som pulssvarsfunktion

$$h(t) = \frac{\cos t}{9 + t^2}.$$

Vilken är systemets utsignal om insignalen är $x(t) = \sin t$? (2p)

Svaren får inte innehålla integraler eller faltningar.

Var god vänd!

6. Konstanten μ i systemet av differentialekvationer,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x + 25y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3\mu x - \mu^2 y, \end{cases}$$

väljs så att alla dess lösningar är periodiska.

a. Vilket är detta μ-värde? Motivera! (2p)

b. Vilken är lösningarnas frekvens mätt i Hz, om t mäts i millisekunder? (1p)

c. Bestäm de periodiska lösningarna för det fall att $x(0) = 1$ och $y(0) = 3$. (3p)

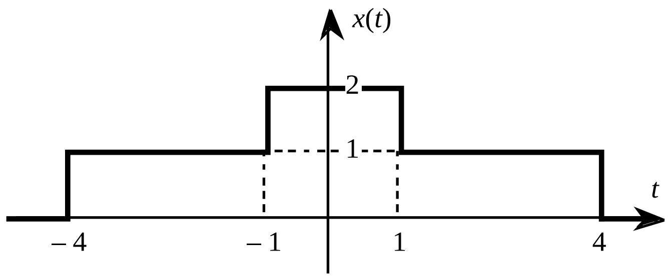
7. a. Bestäm alla jämviktslösningar till

$$\frac{dy}{dx} = \cos y\,(1 + \cos^3 y).$$ (1p)

b. Vilka är stabila respektive instabila? Motivera svaret. (2p)

c. Bestäm värdemängden till den lösning som uppfyller villlkoret $y(1) = 3{,}15$. (1p)

8. Funktionen $x(t)$ antar bara heltalsvärdena 0, 1 och 2 enligt diagrammet här till höger.



a. Skissera den 4-periodiska fortsätt ningen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - 4n)$$

till $x(t)$. (2p)

b. Beräkna de komplexa fourierseriekoefficienterna till $y(t)$. Svaret får inte innehålla integraler eller oändliga serier. (3p)

Lycka till!