Lösningar till 5B1207, differentialekv. II,
för T2, den 7 juni 2006

(1.) $\sqrt{1+x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$. Ekvationen är separabel:

$\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ eller $y = 0$

Integration ger $2\sqrt{y} = 2\sqrt{1+x} + C$

Villkoret $y(0) = 9 \Rightarrow C = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4$

Alltså $y = (\sqrt{1+x} + 2)^2$

Lösningen är giltig endast då $x > -1$

(Då $x < -1$ är funktionen inte reell och för $x = -1$ är den inte deriverbar.)

<u>Svar:</u> $y = (\sqrt{1+x} + 2)^2$, $x > -1$

(2.) Man har (t.ex. enligt tabell) att för $a > 0$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a+i\omega}$$

$$e^{at}u(-t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a-i\omega}$$

Vi delar därför upp det givna bråket i partialbråk:

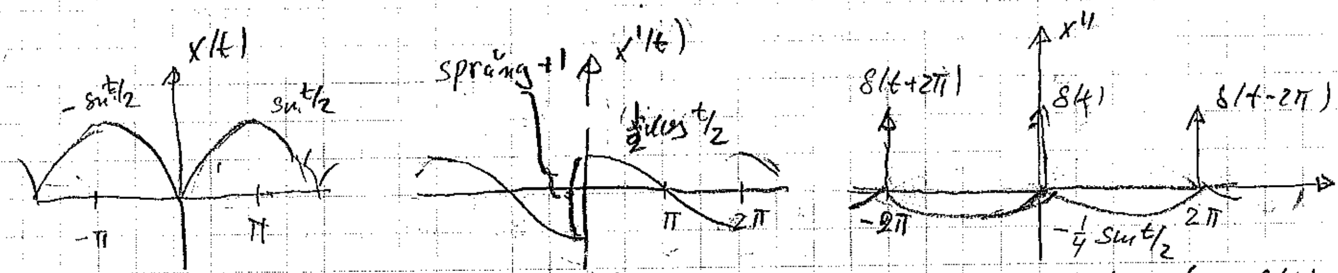
$$\frac{30-5i\omega}{\omega^2+i\omega+6} = \left[\begin{array}{l}\text{Faktorisering av nämnaren:}\\ \omega^2+i\omega+6=0 \Leftrightarrow \omega = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}-6}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{30-5i\omega}{(\omega+3i)(\omega-2i)} = \left[\begin{array}{l}\text{Hand-}\\ \text{påläggning}\end{array}\right] = \frac{\frac{30-15}{-5i}}{\omega+3i} + \frac{\frac{30+10}{5i}}{\omega-2i} =$$

$$= 3i\,\frac{1}{\omega+3i} - 8i\,\frac{1}{\omega-2i} = 3\,\frac{1}{3-i\omega} + 8\,\frac{1}{2+i\omega} \xrightarrow{FT^{-1}} 3e^{+3t}u(-t) + 8e^{-2t}u(t)$$

<u>Svar:</u> $3e^{3t}u(-t) + 8e^{-2t}u(t) = \begin{cases} 8e^{-2t}, & t > 0, \\ 3e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$

(3.) $x(t) = |\sin t/2|$ är 2π-periodisk, ty $\left|\sin \frac{t+2\pi}{2}\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right| =$
$= \left|-\sin \frac{t}{2}\right| = \left|\sin \frac{t}{2}\right|$. (Grafskisserna visar drygt två perioder.)



$$\begin{cases} x(t) = \sin t/2 \quad 0 < t < 2\pi, \\ x(t+2\pi) = x(t). \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}\cos t/2 \quad 0 < t < 2\pi, \\ x'(t+2\pi) = x'(t). \end{cases} \quad \begin{cases} x''(t) = -\frac{1}{4}\sin t/2 + \delta(t), \\ \qquad 0 \le t < 2\pi, \\ x''(t+2\pi) = x''(t). \end{cases}$$

<u>Svar</u>: $x + 4x'' = 4\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n)$

(4.) Ekvationen är linjär och på "normerad" form:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+x}y = \frac{x}{1+x}$$

Integrerande faktor: $e^{\int\left(-\frac{1}{1+x}\right)dx} = e^{-\ln(1+x)} = \frac{1}{x+1}$

Multipliceras den normerade ekvationen med denna faktor, så får man $\left(\frac{1}{x+1}\cdot y\right)' = \frac{x}{(x+1)^2}$

Integration ger nu:

$$\frac{1}{1+x}\cdot y = \int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + C$$

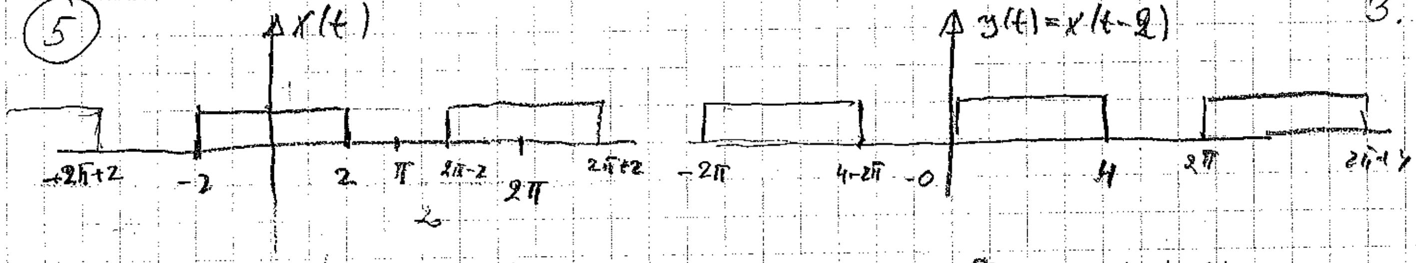
Villkoret $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 + C \Rightarrow C = -1$,

varav $y = (1+x)\ln|1+x| + 1 - (1+x) = (1+x)\ln(1+x) - x$

Lösningen är giltig då $x > -1$ (för $x = -1$ saknar y derivata)

<u>Svar</u>: $y = (1+x)\ln(1+x) - x$, $x > -1$

(5)



Om $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ så är $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t-2)} =$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2in}\cdot e^{int} \quad \text{och} \quad z(t) = e^{3it}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2in} e^{int} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2in} e^{i(n+3)t} = [\text{Byt } n \text{ mot } n-3] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-3} e^{-2i(n-3)} e^{int}$$

c_n kan beräknas t.ex ur

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} e^{-int}\,dt = [\text{om } n\neq 0] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{2in}-e^{-2in}}{in} = \frac{\sin 2n}{\pi n}$$

för $n=0$ får man $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} dt = \frac{2}{\pi}$

[Alternativt kan man använda att

$$\text{rect}\, t \xrightarrow{FT} \text{sinc}\,\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{rect}\, t/4 \xrightarrow{FT} 4\,\text{sinc}\,\frac{2\omega}{\pi}$$

och att FS-koefficienterna c_n för den 2π-periodiska fortsättningen av rect $t/4$ då är $= \frac{1}{2\pi}\left(4\,\text{sinc}\,\frac{2\omega}{\pi}\right)_{\omega=\frac{2\pi n}{2\pi}=n} =$

$[n\neq 0] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2n}{2n} = \frac{\sin 2n}{\pi n}$ och $= \frac{2}{\pi}$ då $n=0$)]

Detta ger Svar a: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{-2in}\frac{\sin 2n}{\pi n} e^{int} + \frac{2}{\pi}$ och

b: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 3}}^{\infty} \frac{\sin 2(n-3)}{\pi(n-3)} e^{-2i(n-3)} e^{int} + \frac{2}{\pi}\cdot e^{3it}$

6. Man har

a. $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \xrightarrow{FT} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi}$

vara, efter skalning med faktor $\frac{a}{\pi}$,

$$\frac{\sin at}{at} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{a} \operatorname{rect} \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{a} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2a}$$

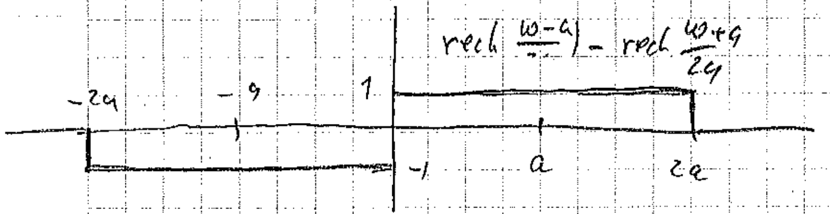
vidare $\sin at \xrightarrow{FT} -\pi i \left(\delta(t-a) - \delta(t+a) \right)$

varav enl. faltningsprincipen

$$a \sin at \cdot \frac{\sin at}{at} \xrightarrow{FT} \left[-a\pi i (\delta(t-a) - \delta(t+a)) * \frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{rect} \frac{\omega}{2a} \right] \cdot \frac{1}{2\pi} =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left(\delta(t-a) * \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right) - \delta(t+a) * \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right) \right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left(\operatorname{rect} \frac{\omega - a}{2a} - \operatorname{rect} \frac{\omega + a}{2a} \right) =$$

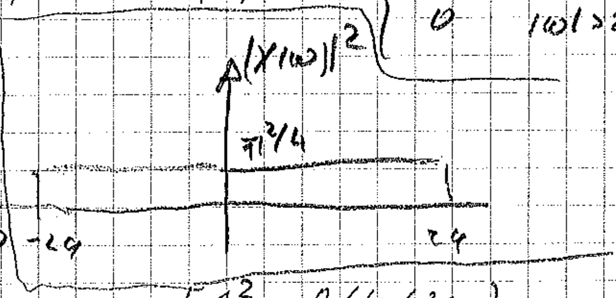


$$= -\frac{\pi i}{2} \begin{cases} 1 & 0 < \omega < 2a \\ -1 & -2a < \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > 2a \end{cases}$$

Svar: $X(\omega) = -\frac{\pi i}{2} \left(\operatorname{rect} \frac{\omega - a}{2a} - \operatorname{rect} \frac{\omega + a}{2a} \right) = -\frac{\pi i}{2} \begin{cases} 1 & 0 < \omega < 2a \\ -1 & -2a < \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > 2a \end{cases}$

Energin $= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$

b. Parsevals relation:



Totala energin $= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$

I detta fall är $|X(\omega)|^2 = \frac{\pi^2}{4} |-i|^2 \begin{cases} 1^2 & 0 < \omega < 2a \\ (-1)^2 & -2a < \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > 2a \end{cases} =$

$$= \frac{\pi^2}{4} \begin{cases} 1 & |\omega| < 2a \\ 0 & |\omega| > 2a \end{cases}$$

varfa $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \int_{-2a}^{2a} d\omega = \frac{4a\pi}{8} = \frac{a\pi}{2}$

Svar: $\frac{a\pi}{2}$

7. Laplacetransformering ger:

$$\begin{cases} sX(s) - 2 = 4X(s) - 2Y(s) - \dfrac{5}{s} \\ sY(s) = 3X(s) - Y(s) - \dfrac{3}{s^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s-4 & +2 \\ -3 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{5}{s} \\ -\frac{3}{s^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 3 & s-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-\frac{5}{s} \\ -\frac{3}{s^2} \end{pmatrix}, \text{ där } \Delta = (s-4)(s+1)+6 = s^2-3s+2 = (s-1)(s-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{pmatrix} (s+1)(2-\frac{5}{s}) + \frac{6}{s^2} \\ 3(2-\frac{5}{s}) - (s-4)\frac{3}{s^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{pmatrix} \dfrac{2s^3-3s^2-5s+6}{s^2} \\ \dfrac{6s^2-18s+12}{s^2} \end{pmatrix}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$X = \frac{2s^3-3s^2-5s+6}{(s-1)(s-2)\cdot s^2} = \frac{0}{s-1} + \frac{0}{s-2} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$$

[Obs f.ö. att 1 och 2 är nollställen till 3:e gradspolynomet i täljaren varför denna kan faktoriseras $2s^3-3s^2-5s+6 = (s-1)(s-2)(2s+3)$ vilket direkt ger att $X = \frac{2s+3}{s^2} = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

$$Y = 6\,\frac{s^2-3s+2}{(s-1)(s-2)\,s^2} = 6\,\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)\,s^2} = \frac{6}{s^2}$$

Återtransformering ger <u>svaret</u>: $\underline{x(t) = 2+3t}$, $\underline{y(t) = 6t}$

Uppgiften kan också lösas med egenvärdes- och variation-av-parametermetoderna, men då blir kalkylen mera omfattande:

I. Systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ +3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -3t \end{pmatrix}$$

7 alternativ.

II (Beräkning av fundamentalmatris)

Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2$

Egenvektorer:

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalmatris är alltså

$$\phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ 3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{och inversen: } \phi^{-1} = \frac{1}{-e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -3e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \\ 3e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

III (Variation-av-parameteransats)

Ansatsen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$ i det givna systemet ger

Villkoren på $A(t)$ och $B(t)$:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5-3t)e^{-t} \\ (-15+6t)e^{-2t} \end{pmatrix},$$

varav $A = \int (5-3t)e^{-t}\,dt = -(5-3t)e^{-t} + \int (-3)e^{-t}\,dt =$

$= (3t-2)e^{-t} (+ C_1)$

och

$B/_3 = \int (-5+2t)\, e^{-2t} = \frac{1}{2}(5-2t)e^{-2t} + \int 2\,\frac{e^{-2t}}{2}\,dt =$

$= (2-t)e^{-2t} (+ C_2)$

En partikulär lösning är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} (3t-2)e^{-t} \\ (6-3t)e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3t-2) + (6-3t) \\ 3(3t-2) + (6-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

Observerar man att begynnelsevillkoren $x(0) = 2$, $y(0) = 6$ är uppfyllda, så har man svaret: $x(t) = 3t+2$, $y(t) = 6t$

8.) a. Begynnelsevärdesproblem – Laplacetransformering är naturlig.

Vi har $y'' \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - s\underbrace{y'(0)}_{=0} - \underbrace{y(0)}_{=0} = s^2 Y(s)$

$\delta(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} \quad (a>0)$

alltså

$$y'' + y = 5\sum_{n=1}^{1000} \delta(t-2\pi n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2+1)Y(s) = 5\sum_{n=1}^{1000} e^{-2\pi n s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \sum_{n=1}^{1000} \frac{5}{s^2+1} e^{-2\pi n s}$$

Återtransformering: $\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t$

$$\frac{e^{-2\pi n s}}{s^2+1} \longrightarrow \sin(t-2\pi n)\cdot u(t-2\pi n) = \sin t \cdot u(t-2\pi n)$$

Alltså <u>Svar:</u> $y(t) = 5\sin t \cdot \sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n)$

b. Eftersom $u(t-2\pi n) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi n \\ 0 & t < 2\pi n \end{cases}$ så gäller för

$0 < t < 2\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = 0$

$2\pi < t < 4\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = u(t-2\pi) = 1$

$4\pi < t < 6\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = u(t-2\pi) + u(t-4\pi) = 2$

<u>Svar:</u> 0, $5\sin t$ resp $10\cdot\sin t$

c. $2\pi N < t < 2\pi(N+1) \Rightarrow 2\pi(N-n) < t - 2\pi n < 2\pi(N-n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow u(t-2\pi n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \le N \\ 0 & \text{om } n \ge N+1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$

I detta t-intervall är alltså $y(t) = 5N\cdot\sin t$

Max-amplituden i detta intervall är därför $5N$ (i mm). Om $N = 1000$ är den 5m – då lär bron redan ha skakat sönder.

<u>Svar:</u> $y(t) = 5N\sin t$. Bron lär inte hålla