Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 7 juni 2006, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p.
ECTS-betyg: A: 26 – , B: 23 – 25, C: 20 – 22, C: 17 – 19, E: 14 – 16, F: 0 – 13.
11 – 13p berättigar till en kompletterande tentamen upp till betyget 3 (E).

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

   Bestäm den reella lösning till differentialekvationen
$$\sqrt{1+x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$
   som uppfyller villkoret $y(0) = 9$ och ange det största intervall i vilket lösningen är giltig. (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

   Signalen $x(t)$ har fouriertransformen
$$X(\omega) = \frac{30 - 5i\omega}{\omega^2 + i\omega + 6},\ \omega \text{ mätt i radianer/tidsenhet.}$$
   Bestäm $x(t)$.
   Svaret får inte innehålla några integraler. (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
   Förenkla så långt som möjligt $x + 4x''$, då
$$x(t) = |\sin(t/2)|$$
   och x'' betecknar den generaliserade andraderivatan. (3p)

4. Funktionen $y(x)$ är deriverbar och uppfyller villkoren
$$(x+1)\frac{dy}{dx} = y + x \quad \text{och } y(0) = 0.$$
   Bestäm $y(x)$ och ange det största intervall i vilket lösningen är giltig. (3p)

5. Signalen $x(t)$ är 2π-periodisk och i intervallet $-\pi < t < \pi$ gäller att
$$x(t) = \operatorname{rect}(t/4).$$
   Vilken är den komplexa fourierserieutvecklingen av
   a. $y(t) = x(t-2)$? (2p)
   b $z(t) = e^{3it}\,y(t)$? (1p)

6. a. Beräkna fouriertransformen till signalen
$$x(t) = \frac{\sin^2 at}{t},\ a \text{ en konstant} > 0. \quad (3p)$$
   (Tips: Signalen kan skrivas $a \sin at \cdot \frac{\sin at}{at}$.)
   b. Vilken är signalens totala energi? (2p)
   Svaren får inte innehålla integraler eller oändliga serier.

7. Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ så att
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y - 5, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - 3t \end{cases}$$
   och $x(0) = 2$, $y(0) = 0$. (5p)

Var god vänd!

8. Ett infanteriregemente marscherar taktfast över en bro som därmed kommer i svängning. Avvikelsen $y(t)$, i mm, från jämviktsläget vid brons mittpunkt kan, vid försumbar dämpning, för $t > 0$ antas uppfylla differentialekvationen

$$y'' + y = f(t),$$

där stötpåkänningen $f(t)$ orsakad av marscherandet ges av

$$f(t) = \sum_{n=1}^{1000} 5\delta(t - 2\pi n).$$

$\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion.

a. Bestäm $y(t)$ då $y(0) = y'(0) = 0$. (3p)

b. Ge på så enkel form som möjligt uttryck för lösningen då $0 < t < 2\pi$, $2\pi < t < 4\pi$ respektive $4\pi < t < 6\pi$. (1p)

c. Allmännare: Hur blir motsvarande uttryck i intervallet $2\pi N < t < 2\pi(N + 1)$, N positivt heltal ≤ 1000?

Har man skäl att tro att bron håller? (1p)

Lycka till!