Lösningar till tentamen 070418 för 5B1207, Diff-ekv II för T2

(1.) Variant I (Egenvärdesmetoden)

- Systemets egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

- Egenvektorer till $\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (3-i)v_1 - 5v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

- En komplex lösning till systemet är därför:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right](\cos t + i \sin t)$$

Eftersom det givna systemet har enbart reella koefficienter så är även real- resp. imaginärdelarna lösningar till systemet.

Realdelen: $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t$

Imaginärdelen: $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t$

Systemets allmänna lösning är på reell form:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 5\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

- Begynnelsevillkoren $(x(0), y(0)) = (5, 1)$ ger nu

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}A + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ varav}$$

<u>Svar</u>: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos t + 10\sin t \\ \cos t + 7\sin t \end{pmatrix}$

Variant 2: (Laplacetransformering)

Laplacetransformering, med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren, ger

$$\begin{cases} s\bar{X} - 5 = 3\bar{X} - 5\bar{Y} \\ s\bar{Y} - 1 = 2\bar{X} - 3\bar{Y} \end{cases}$$ eller på matrisform:

$$\begin{pmatrix} s-3 & 5 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s+3 & -5 \\ 2 & s-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} 5s+10 \\ s+7 \end{pmatrix};$$ Alltså

$$\underline{X}(s) = \frac{5s+10}{s^2+1} = 5\,\frac{s}{s^2+1} + 10\cdot\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = 5\cos t + 10\sin t$$

$$\underline{Y}(s) = \frac{s+7}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + 7\cdot\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \cos t + 7\sin t$$

<u>Svar</u> som ovan

(2.)

$$\frac{t}{t^2+2t+5} = \left[\text{kvadrat-komplettering}\right] = \frac{t}{(t+1)^2+4} = \frac{t+1}{(t+1)^2+4} - \frac{1}{(t+1)^2+4}$$

Man har (t.ex. enl. tabell)

$$\frac{1}{t^2+2^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{2}\,e^{-2|\omega|}$$

Derivata av $|\omega|$

$$\frac{t}{t^2+2^2} \xrightarrow{FT} i\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\pi}{2}\,e^{-2|\omega|}\right) = \frac{i\pi}{2}\,e^{-2|\omega|}\left(-2\cdot\operatorname{sign}\omega\right) =$$

$$= -i\pi\,e^{-2|\omega|}\cdot\operatorname{sign}\omega$$

$$x(t-a) \xrightarrow{FT} e^{-ia\omega}\,\underline{X}(\omega)$$

Alltså

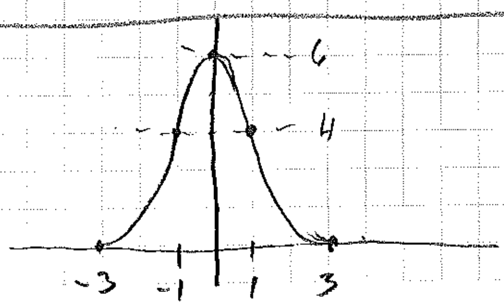
$$\frac{t+1}{(t+1)^2+4} \xrightarrow{FT} -i\pi\,e^{-2|\omega|}\,e^{i\omega}\cdot\operatorname{sign}\omega$$

$$\frac{1}{(t+1)^2+4} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{2}\,e^{-2|\omega|}$$ varav

<u>Svar</u>: $-\pi\,e^{-2|\omega|}\left(i\,e^{i\omega}\operatorname{sign}\omega + \frac{1}{2}\right)$

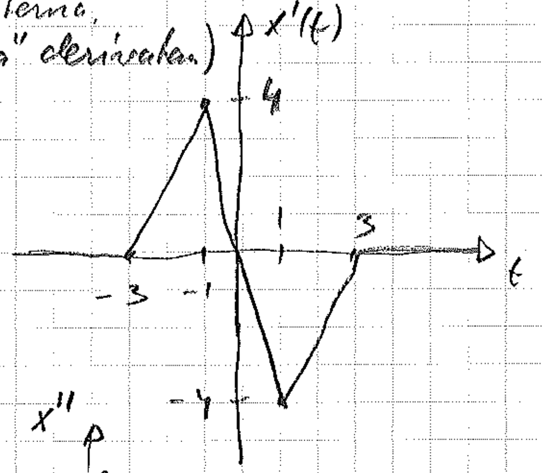
(3.)

$$x(t) = \begin{cases} 2(3-t^2) & -1 < t \le 1 \\ (t-3)^2 & 1 < t \le 3 \\ (t+3)^2 & -3 \le t \le -1 \\ 0 & t > 3 \text{ eller } t < -3 \end{cases}$$



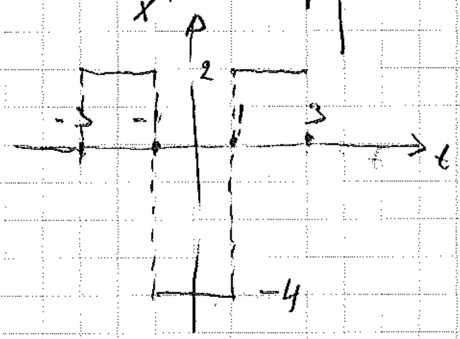
x(t) är kontinuerlig även i skarvpunkterna.
(Generaliserade derivatan = "klassiska" derivatan)

$$x'(t) = \begin{cases} -4t & |t|<1 \\ 2(t-3) & 1<t<3 \\ 2(t+3) & -3<t<-1 \\ 0 & |t|>3 \end{cases}$$



Även $x'(t)$ är kontinuerlig i skarvpunkterna.

$$x''(t) = \begin{cases} -4 & |t|<1 \\ 2 & 1<|t|<3 \\ 0 & |t|>3 \end{cases}$$



x'' har språng i ± 1 och ± 3:

$$x'''(t) = \{0\} + 2(\delta(t+3) - \delta(t-3)) - 6(\delta(t+1) - \delta(t-1))$$

Fouriertransformeras denna likhet får man

$$\underbrace{(i\omega)^3}_{-i\omega^3} X(\omega) = 2(e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}) - 6(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) =$$
$$= 4i \cdot \sin 3\omega - 12 i \sin\omega = -4i(3\sin\omega - \sin 3\omega)$$

Varav $X(\omega) = \frac{4}{\omega^3}(3\sin\omega - \sin 3\omega)$; Svar:

[$X(0)$ kan beräknas ur detta eftersom $X(\omega)$ är kontinuerlig

$$X(0) = \lim_{\omega\to 0} \frac{4}{\omega^3}(3\sin\omega - \sin 3\omega) = 4 \lim_{\omega\to 0} \frac{3(\omega - \frac{\omega^3}{6}) - (3\omega - \frac{(3\omega)^3}{6}) + O(\omega^5)}{\omega^3} =$$
$$= 4 \lim_{\omega\to 0}\left(\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + O(\omega^2)\right) = 4 \cdot 4 = 16.$$

Alternativt (men jobbigare) kan man beräkna $X(0)$ ur

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 2\int_0^1 2(3-t^2)\,dt + 2\int_1^3 (t-3)^2\,dt = \frac{32}{3} + \frac{16}{3} = 16.$$]

(4.) Ekvationen är separabel och har konstantlösningarna $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n heltal. Dessa uppfyller dock inte villkoret $y(1) = \frac{\pi}{4}$. För övriga lösningar gäller:

$$\int \frac{\cos y \, dy}{\sin y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|\sin y| = \ln|x| + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin y = Cx \quad (\text{där även } C<0 \text{ tillåts})$$

Begynnelsevillkoret ger nu $\sin\frac{\pi}{4} = C$ dvs. $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

varav $y = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + 2n\pi & \text{eller} \\ \pi - \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + 2n\pi \end{cases}$ för något heltal n

Återanvändning av villkoret $y(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$

Eftersom $\arcsin t$ är definierad endast då $-1 \le t \le 1$ och deriverbar endast då $-1 < t < 1$ så är det maximala definitionsintervallet för lösningen: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

<u>Svar</u>: $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$, $|x| < \sqrt{2}$

---

(5) Det sammansatta systemets pulssvarsfunktion är fourierfaltningen av delarnas pulssvarsfunktion. Vi skall alltså beräkna

$$y(t) = \operatorname{sinc} at * \operatorname{sinc} bt$$

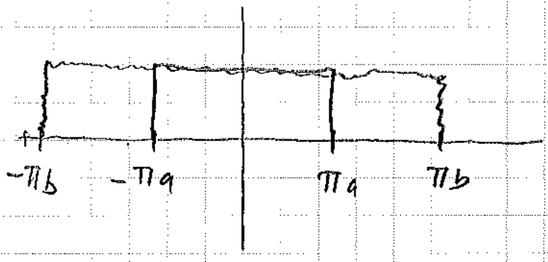
Med tanke på att $\operatorname{sinc} t \xrightarrow{FT} \operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi}$ så är för $a, b > 0$

$\operatorname{sinc} at \xrightarrow{FT} \frac{1}{a}\operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi a}$ och $\operatorname{sinc} bt \xrightarrow{FT} \frac{1}{b}\operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi b}$

Faltningssatsen ger nu att

$$Y(\omega) = \frac{1}{ab}\operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi a} \cdot \operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi b}$$

(5 forts.) Men $\mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi a} = \begin{cases} 1 & \text{om } |\omega| < \pi a \\ 0 & \text{om } |\omega| > \pi a \end{cases}$ och $\mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi b} = \begin{cases} 1 & \text{om } |\omega| < \pi b \\ 0 & \text{om } |\omega| > \pi b \end{cases}$



Eftersom $b \geq a$, så är

$$\mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi a} \cdot \mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi b} = \begin{cases} 1 & \text{om } |\omega| < \pi a \\ 0 & \text{om } |\omega| > \pi a \end{cases} = \mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi a}$$

Vi har alltså att

$$Y(\omega) = \frac{1}{ab} \cdot \mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi a} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}\mathrm{rect}\frac{\omega}{2\pi a}$$

Återtransformering ger att $y(t) = \frac{1}{b} \operatorname{sinc} at$

<u>Svar:</u> Pulssvarsfunktionen är $\frac{1}{b} \operatorname{sinc} at$.

---

6. Med tanke på att ekvationens koefficienter är oberoende av t, så laplacetransformerar vi med avseende på den variabeln:

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st}\, dt \quad (s > a)$$

Speciellt får man $U(0,s) = \int_0^\infty \underbrace{u(0,t)}_{=0} e^{-st}\, dt = 0$

och $\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) e^{-st}\, dt$ varför den partiella diff.ekv. efter transformation övergår i

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + sU - \underbrace{u(x,0)}_{x^2} = x \cdot \frac{1}{s}$$

Dvs. U satisfierar den ordinära diff.ekv.

$$(*) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{s}{x} U = x + \frac{1}{s}$$, där vi för tillfället behandlar s som konst.

Denna ekv. är linjär och av ordning 1. Integrerande faktorn är $e^{\int \frac{s}{x} dx} = x^s$

Multipliceras (*) med denna så får man

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{s}\cdot U\right) = x^{s+1} + \frac{1}{s}x^{s}$$

Integration ger

$$x^{s}U = \frac{x^{s+2}}{s+2} + \frac{1}{s(s+1)}\cdot x^{s+1} + C$$

dvs. $$U = \frac{1}{s+2}x^{2} + \frac{1}{s(s+1)}x^{1} + C\frac{1}{x^{s}}$$

Villkoret $U(0,s) = 0$ ger $C = 0$. Alltså

$$U = \frac{1}{s+2}x^{2} + \frac{1}{s(s+1)}x\,.$$

Med beaktande av att $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ ger återtransformation

$$u(x,t) = e^{-2t}x^{2} + (1 - e^{-t})x$$

<u>Svar:</u> $u(x,t) = e^{-2t}x^{2} + (1-e^{-t})x$

(7.) (a.) Variant I (Direkt beräkning)

Enligt syntesekvationen:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\omega(1+t)} + e^{i\omega(t-1)}\right)d\omega = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i\omega(1+t)}}{i(1+t)} + \frac{e^{i\omega(t-1)}}{i(t-1)}\right]_{\omega=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1+t)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(1+t)}}{i(1+t)} + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}}{i(t-1)}\right]$$

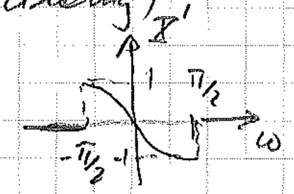
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2i\sin\frac{\pi}{2}(t+1)}{i(1+t)} + \frac{2i\sin\frac{\pi}{2}(t-1)}{i(t-1)}\right) = \left[\begin{array}{l}\sin\frac{\pi}{2}(t+1) = \cos\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}(t-1) = -\cos\frac{\pi}{2}t\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right) = -\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\cdot\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2}$$

<u>Svar a.</u> $x(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2}$

<u>Variant II</u> (Förenkling genom generaliserad derivering)

Man har att $\underline{X}'(\omega) = \begin{cases} -\sin\omega & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$



och $\underline{X}''(\omega) = \begin{cases} -\cos\omega & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases} + \delta(\omega+\frac{\pi}{2}) + \delta(\omega-\frac{\pi}{2})$

varav

$$\underline{X}'' + \underline{X} = \delta(\omega+\tfrac{\pi}{2}) + \delta(\omega-\tfrac{\pi}{2})$$

Återtransformeras detta (använd eventuellt tabell) får man

$$(-t^2+1)\,x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(e^{i\frac{\pi}{2}t}+e^{-i\frac{\pi}{2}t}\right) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t$$

varav $x(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2}$

(b.) Eftersom enligt analysekvationen, med $\omega = 0$

$$\underline{X}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$$

så är $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2} = \pi\,\underline{X}(0) = \pi\cdot 1 = \pi$: <u>Svar</u>

(c.) Parsevals relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\underline{X}(\omega)|^2\,d\omega$$

specialiseras detta till uppgiftens funktioner får man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2}\right|^2 dt = \pi^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\omega\,d\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$: <u>Svar</u>

8. a.) Man har

$$x\left(t-\frac{n}{10}\right) \xrightarrow{FT} e^{-i\omega\frac{n}{10}} \cdot X(\omega)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x\left(t-\frac{n}{10}\right) \xrightarrow{FT} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega\frac{n}{10}}\right) X(\omega) = Y(\omega)$$

Men $a^n e^{-i\omega\frac{n}{10}} = \left(a e^{-i\frac{\omega}{10}}\right)^n$, så summan är en geometrisk serie med kvot $a e^{-i\omega/10}$ med belopp $|a e^{-i\omega/10}| = a < 1$

Summan är därför $= \dfrac{1}{1-a e^{-i\omega/10}}$

Alltså $\boxed{Y(\omega) = \dfrac{1}{1-a e^{-i\omega/10}} \cdot X(\omega)}$

Den relationen säger också att $X(\omega) = (1 - a e^{-i\omega/10}) Y(\omega)$

vilket efter återtransformation ger

$$\boxed{x(t) = y(t) - a\, y\left(t-\frac{1}{10}\right)}$$

Svar: De inramade uttrycken

---

b.) (Jmfr uppg. 7) x_{test} kontinuerlig även då $|t| = 2$

$$x'_{test}(t) = \begin{cases} 880\pi \cos 880\pi t & |t| < 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}$$

$$x''_{test}(t) = \underbrace{\begin{cases} -(880\pi)^2 \sin 880\pi t & |t| < 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}}_{= -(880\pi)^2 \cdot x_{test}} + 880\pi\, \delta(t+2) - 880\pi\, \delta(t-2)$$

dvs. $x''_{test} + (880\pi)^2 x_{test} = 880\pi(\delta(t+2) - \delta(t-2))$

fouriertransformeras denna likhet får man

$$\left(-\omega^2 + (880\pi)^2\right) \cdot X_{test}(\omega) = 880\pi\left(e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}\right) = 1760\pi i \sin 2\omega$$

8 forts

Alltså: $\boxed{X_{test}(\omega) = 1760\pi i \dfrac{\sin 2\omega}{(880\pi)^2-\omega^2}}$

Enligt a)

$$\boxed{Y_{test}(\omega) = \frac{1760\pi i}{1-ae^{-i\frac{\omega}{10}}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{(880\pi)^2-\omega^2}}$$

Alternativt:

$$x_{test}(t) = \sin 880\pi t \cdot \operatorname{rect}\frac{t}{4} \quad (\text{vi sätter } a = 880\pi)$$

Faltningssatsen, ihop med att $\sin at \xrightarrow{FT} \pi i(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a))$
och $\operatorname{rect}\frac{t}{4} \xrightarrow{FT} 4\operatorname{sinc}\frac{2\omega}{\pi}$ ger att

$$X_{test}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 4\operatorname{sinc}\frac{2\omega}{\pi} * \pi i(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)) = \left[\begin{matrix} z(\omega)*\delta(\omega-a) \\ = z(\omega-a)\end{matrix}\right] =$$

$$= 2i\left(\operatorname{sinc}\frac{2(\omega+a)}{\pi} - \operatorname{sinc}\frac{2(\omega-a)}{\pi}\right) =$$

$$= \boxed{2i\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}+1760\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1760\right)\right)}$$

c) • Om uttrycket i variant I används:

$$Y_{test}(880\pi) = \frac{1760\pi i}{1-a\cdot 1} \cdot \lim_{\omega\to 880\pi}\frac{\sin 2\omega}{(880\pi)^2-\omega^2} = [\text{l'Hospitals regel}] =$$

$$= \frac{1760\pi i}{1-a}\cdot \lim_{\omega\to 880\pi}\frac{2\cos 2\omega}{-2\omega} = \frac{1760\pi i}{1-a}\cdot\frac{1}{-880\pi} = \frac{2i}{a-1}$$

• Om uttrycket i variant II används: Obs att $\operatorname{sinc} n = 0$ om n heltal $\neq 0$ och att $\operatorname{sinc} 0 = 1$:

$$X_{test}(880\pi) = 2i(\operatorname{sinc}(2\cdot 1760) - \operatorname{sinc} 0) = -2i$$

och $Y_{test}(880\pi) = \dfrac{1}{1-ae^{-i88\pi}}\cdot(-2i) = \dfrac{2i}{a-1}$

• $|Y_{test}(880\pi)| = 6.5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|a-1|} = 6.5 \Leftrightarrow [0<a<1] \Leftrightarrow \dfrac{2}{1-a} = \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{7}{11} \approx 0.64$ **Svar**: $a \approx 0.64$