Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 18 april 2007, kl 8.00 – 13.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p.
ECTS-betyg: A: 26 – , B: 23 – 25, C: 20 – 22, C: 17 – 19, E: 14 – 16, F: 0 – 13.
11 – 13p berättigar till en kompletterande tentamen upp till betyget 3 (E).

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ så att

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$$

och $x(0) = 5$, $y(0) = 1$. Lösningarna skall ges på reell form. (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

Bestäm fouriertransformen till

$$x(t) = \frac{t}{t^2 + 2t + 5}$$

Svaret får inte innehålla några integraler. (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p.*)

Beräkna den generaliserade 3:e-derivatan, $x'''(t)$, på så enkel form som möjligt, då

$$x(t) = \begin{cases} 2(3 - t^2), & \text{då } -1 < t \le 1, \\ (t-3)^2, & \text{då } 1 \le t \le 3, \\ (t+3)^2, & \text{då } -3 \le t \le -1, \\ 0, & \text{då } t > 3 \text{ eller } < -3 \end{cases}$$

och ange sedan x:s fouriertransform på reell form. (3p)

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$x \cdot (\cos y) \cdot y' = \sin y$$

som uppfyller villkoret $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$ och ange det största intervall inom vilket det finns någon lösning till problemet. (3p)

5. LTI-systemen L_1 och L_2 har pulssvarsfunktionerna sinc at respektive sinc bt, där a och b är reella konstanter och $0 < a \le b$. Vilken blir pulssvarsfunktionen för det sammansatta system som man får då L_1 och L_2 seriekopplas? Svaret skall förenklas så långt möjligt. (3p)

6. Lös den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x, \quad x > 0 \text{ och } t \ge 0$$

med bivillkoren $u(x, 0) = x^2$ och $u(0, t) = 0$, t.ex. med hjälp av Laplacetransformen. (5p)

Var god vänd!

7. En signal $x(t)$ har fouriertransformen

$$X(\omega) = \begin{cases} \cos\omega, & \text{då } |\omega| < \pi/2, \\ 0 & \text{då } |\omega| > \pi/2. \end{cases}$$

a. Bestäm $x(t)$. (3p)

Beräkna med ledning av svaret på a. det exakta värdet av

b. $$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{1-t^2}\,dt$$ (1p)

c. $$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{\pi t}{2}}{(1-t^2)^2}\,dt$$ (2p)

8. En inkommande ljudsignal $x(t)$ störs av successiva ekon som ankommer med en konstant tidsfördröjning på 0,1 sek, d.v.s. den faktiskt inkommande signalen $y(t)$ är en linjär kombination av signalerna $x(t-n/10)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Man vet också att ekona dämpas successivt med en fix faktor a, $0 < a < 1$, d.v.s. det n:te ekot är $a^n\, x(t-n/10)$. Därmed är

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, x(t-n/10)$$

Man vill kunna rekonstruera signalen $x(t)$ ur signalen $y(t)$ och tänker använda fouriertransformteknik för detta.

a. Uttryck utan summa- eller integraltecken $Y(\omega)$ (fouriertransformen av y) i $X(\omega)$ (fouriertransformen av x) och parametern a. Svaret får inte innehålla integraler eller oändliga serier. Härled ur detta en enkel formel som ger signalen $x(t)$ om man känner $y(t)$ och a.
(Obs att geometriska serier kan summeras!) (3p)

Storheten a är dock okänd, så den måste bestämmas. Ett sätt att förfara är att registrera den inkommande signal $y_{\text{test}}(t)$ som erhålls, då man sänder ett känt testljud, t.ex. ett normal-a (440 Hz) av viss längd (här vald till 4 sek):

$$x_{\text{test}}(t) = \begin{cases} \sin 880\pi t, & \text{då } |t| \le 2, \\ 0, & \text{då } |t| > 2. \end{cases}$$

b. Bestäm $X_{\text{test}}(\omega)$ och uttryck $Y_{\text{test}}(\omega)$ i a. (2p)

c. Beräkna $Y_{\text{test}}(880\pi)$ som funktion av a. Vilket närmevärde för a får man om man empiriskt vet att $|Y_{\text{test}}(880\pi)| \approx 6{,}5$? (1p)

Lycka till!