Lösningar till tenta för 5B1207, 070605

1. Differensen mellan två partikulära lösningar till en linjär ekvation är alltid en lösning till motsvarande homogena ekvation. Så är t.ex $y_2 - y_1 = x^3$ och $y_3 - y_1 = x^4$ lösningar till

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0 \quad (H)$$

Eftersom x^3 och x^4 är linjärt oberoende (ingen av dem kan vara en konstant multipel av den andra) och (H) är av ordning 2, så är dess allmänna lösning

$$y_H = Ax^3 + Bx^4 \quad (A \text{ och } B \text{ konstanter})$$

Den givna inhomogena har därmed den allmänna lösningen

$$y = y_1 + y_H = x^2 + Ax^3 + Bx^4 \; : \underline{\text{Svar}}$$

2.

$$X(\omega) = \frac{1}{\underbrace{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}_{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}} e^{-i\omega} = \left[\begin{matrix}\text{partialbråks-}\\ \text{uppdelning}\end{matrix}\right] = \left(\frac{-\frac{1}{3}}{\omega^2+4} + \frac{\frac{1}{3}}{\omega^2+1}\right) e^{-i\omega}$$

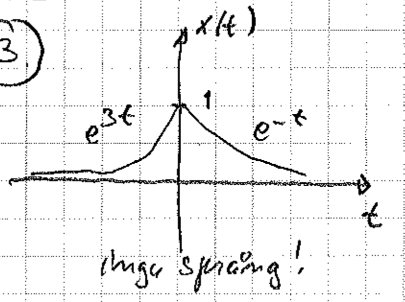
Men $\frac{1}{\omega^2 + a^2} \xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{2a} \cdot e^{-a|t|} \; (a>0)$ och $e^{-i\omega} Y(\omega) \xrightarrow{FT^{-1}} y(t-1)$

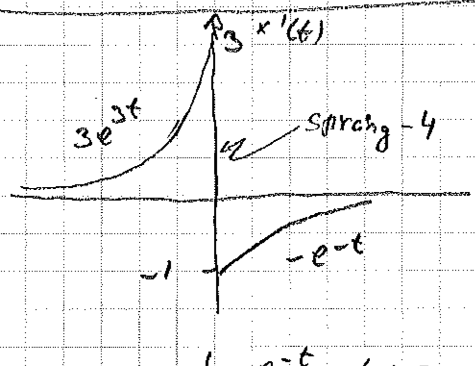
alltså $\frac{1}{\omega^2+4} \cdot e^{-i\omega} \xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{4} e^{-2|t-1|}$ och $\frac{1}{\omega^2+1} e^{-i\omega} \xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{2} e^{-|t-1|}$,

dvs.

$$\underline{\text{Svar:}} \; \frac{1}{6} e^{-|t-1|} - \frac{1}{12} e^{2|t-1|}$$

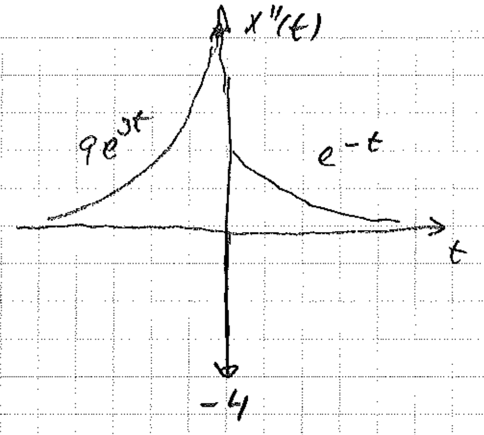
3.





$$x'(t) = \begin{cases} -e^{-t} & t > 0 \\ 3e^{3t} & t < 0 \end{cases}$$

3. forts



$$x''(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t>0 \\ 9e^{3t}, & t<0 \end{cases} - 4\delta(t)$$

Alltså:

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = \begin{cases} e^{-t} - 2(-e^{-t}) - 3e^{-t} \\ 9e^{3t} - 2\cdot 3e^{3t} - 3e^{3t} \end{cases} - 4\delta(t) =$$

$= \underline{\underline{4\delta(t)}}$; Svar

(4.) Ekvationen är linjär och av ordning 1. På "standardform":

$$y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = \frac{1}{x} e^{-x} \quad (*)$$

Integrerande faktor:

$$e^{\int (1-\frac{1}{x})dx} = e^{x - \ln x} = \frac{1}{x} e^{x}$$

Multipliceras (*) med denna får man

$$\left(\frac{1}{x} e^{x} y\right)' = \frac{1}{x} e^{-x} \cdot \frac{1}{x} e^{x} = \frac{1}{x^2}$$

Integration ger $\frac{1}{x} e^{x} y = -\frac{1}{x} + C$

och villkoret $y(1/2) = 0$: $0 = -2 + C$, dvs $C = 2$, varav

Svar: $y = (2x-1)e^{-x}$

(5.) Ekvationen kan skrivas $y'' + y = y * \sin t$, där $*$ betecknar Laplacefaltning. Laplacetransformering, med hänsyn taget till begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$:

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+1-\frac{1}{s^2+1}} =$$

$$= \frac{s^2+1}{s^4+2s^2} = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t$$; **Svar**

(6.) a. Jämviktslösningen asymptotiskt stabil om alla systemets egenvärden har realdel <0, instabil om någon av egenvärdena har realdel >0. Systemets egenvärden i detta fall

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-6\lambda-7 \iff \lambda=-1,\ +7$$

Ett egenvärde är $>0 \Rightarrow$ Lösningen instabil : Svar a

---

b. $\frac{d}{dt}(A\mathbf{x})=0 \iff A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{c}$ (konstant godtycklig 2-vektor)

Om dessutom $\det A\neq 0$, så är A inverterbar, dvs. $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{c}$. Å andra sidan kan den allmänna lösningen till det givna systemet skrivas $\mathbf{x}=\Phi\mathbf{c}$, där Φ är en fundamentalmatris (dvs. en matris vars kolonner är linjärt oberoende och är lösningar till systemet)

Som A duger därför Φ^{-1}.

Vi bestämmer en fundamentalmatris med hjälp av egenvärdesmetoden: Systemets egenvärden bestämdes i a. Motsvarande egenvektorer:

$$\lambda=-1:\quad \begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=7:\quad \begin{pmatrix}-5 & 3\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$$

Detta ger t.ex.

$$\Phi=\begin{pmatrix}e^{-t} & 3e^{7t}\\ -e^{-t} & 5e^{7t}\end{pmatrix} \quad \text{och}$$

$$\Phi^{-1}=A=\frac{e^{-6t}}{8}\begin{pmatrix}5e^{7t} & -3e^{7t}\\ e^{-t} & e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5e^{t} & -3e^{t}\\ e^{-7t} & e^{-7t}\end{pmatrix}$$: Svar b

(7.) a. Variant I: (Direkt beräkning)

Serien är 2π-periodisk (eftersom dess termer $c_n e^{int}$ är det). Koefficienterna erhålls ur

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{0} -\cos 2t \cdot e^{-int} dt + \int_{0}^{\pi} \cos 2t \, e^{-int} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{subst } t \to t+\pi \\ \text{i den 1:a integralen}\end{array}\right] = \int_0^{\pi} - \underbrace{\cos(2t+2\pi)}_{=\cos 2t} \cdot e^{-int} \underbrace{e^{-in\pi}}_{=(-1)^n} dt + \int_0^{\pi} \cos 2t \, e^{-int} dt$$

$$= (1-(-1)^n) \int_0^{\pi} \cos 2t \, e^{-int} dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ om } n \text{ jämt} \\ 2 \int_0^{\pi} \cos 2t \, e^{-int} dt \text{ om } n \text{ udda} \end{array}\right\}$$

För udda n: $2 \int_0^{\pi} \cos 2t \, e^{-int} dt = \int_0^{\pi} (e^{2it} + e^{-2it}) e^{-int} dt =$

$$= \int_0^{\pi} \left(e^{(2-n)it} + e^{-(2+n)it}\right) dt = \left[\frac{e^{(2-n)it}}{\underbrace{(2-n)i}_{\neq 0, \text{ då } n \text{ udda}}} - \frac{e^{-(2+n)it}}{(2+n)i}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} e^{ni\pi} = e^{-ni\pi} = -1 \\ \text{om } n \text{ udda} \\ e^{2i\pi} = e^{-2i\pi} = 1 \end{array}\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{-2}{2-n} + \frac{2}{2+n}\right] = \frac{4ni}{4-n^2}$$

Alltså $c_n = \dfrac{2ni}{\pi(4-n^2)}$ om n udda, $= 0$ om n jämt

Den reella fourierserien har formen

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

där $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = 0$ och $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)}$

Svar: $c_n = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ om } n \text{ jämt} \\ \dfrac{2ni}{\pi(4-n^2)}, \text{ om } n \text{ udda} \end{array}\right\}$; $s(t) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{n}{n^2-4} \sin nt$

Variant II (Användning av fourierteori)

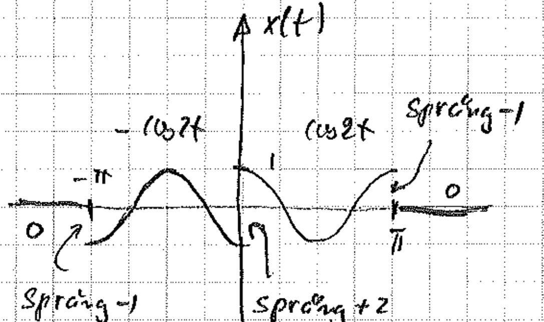
Seriesumman $s(t)$ är den 2π-periodiska fortsättningen av

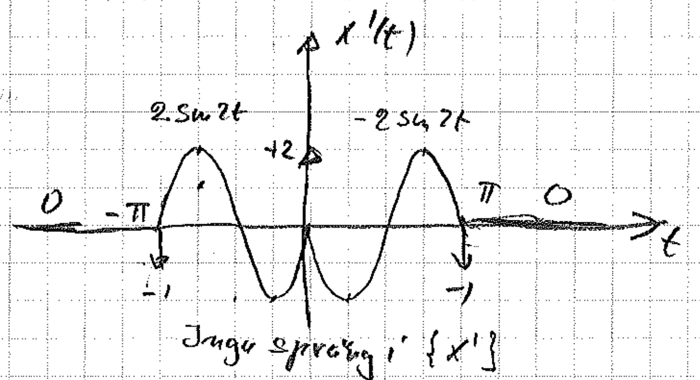
$$x(t) = \begin{cases} (\operatorname{sign} t)\cdot\cos 2t & |t|<\pi \\ 0 & |t|>\pi \end{cases}$$

De sökta fourierkoefficienterna kan därför bestämmas ur en sampling av fouriertransformen för $x(t)$:

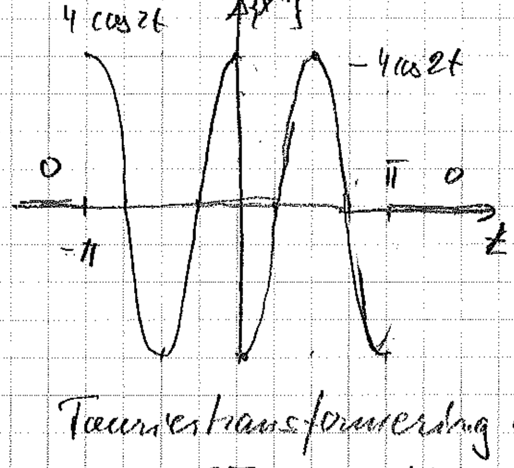
$$c_n = \frac{1}{2\pi} X\left(\frac{2\pi n}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} X(n).$$

Vi beräknar $X(\omega)$ genom att utnyttja att den generaliserade andraderivatan x'', så när som på δ-pulser, är en multipel av $x(t)$. Vi reder först ut detta:





$$x'(t) = \left.\begin{cases} -2\sin 2t & 0<t<\pi \\ 2\sin 2t & -\pi<t<0 \\ 0 & |t|>\pi \end{cases}\right\} - \delta(t+\pi) + 2\,\delta(t) - \delta(t-\pi)$$



$$x''(t) = -4x(t) - \frac{d}{dt}\left(\delta(t+\pi) - 2\delta(t) + \delta(t-\pi)\right)$$

Fouriertransformering av denna likhet ger

$$-\omega^2 X(\omega) = -4X(\omega) - i\omega\left(e^{-i\pi\omega} - 2 + e^{i\pi\omega}\right)$$

dvs. $(4-\omega^2)X(\omega) = i\omega(2 - 2\cos\pi\omega)$, dvs. $X(\omega) = \dfrac{2i\omega(1-\cos\pi\omega)}{4-\omega^2}$

För $\omega = \pm 2$ har man $X(\pm 2) = \lim_{\omega\to\pm 2} X(\omega) = $ [l'Hospitals regel] $=$

7a forts.

$$= \lim_{\omega \to \pm 2} \frac{2i(1-\cos\pi\omega) + 2i\omega \cdot \pi \sin \pi\omega}{-2\omega} = 0$$

Detta ger att $C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2in(1-\cos\pi n)}{4-n^2} = \frac{in(1-(-1)^n)}{4-n^2} =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ jämnt} \neq \pm 2 \\ \frac{2in}{\pi(4-n^2)}, & \text{om } n \text{ udda} \end{cases} \quad \text{och } C_{\pm 2} = 0.$$

Svar som ovan

7b. $s(t)$ är 2π-periodisk, varför

$$s\left(\frac{3\pi}{2}\right) = s\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = s\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[-\pi/2 \text{ ligger i intervallet } -\pi < t < \pi \right] =$$

$$= \text{sign}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos 2\frac{\pi}{2} = (-1)^2 = \underline{\underline{1}} : \text{Svar}$$

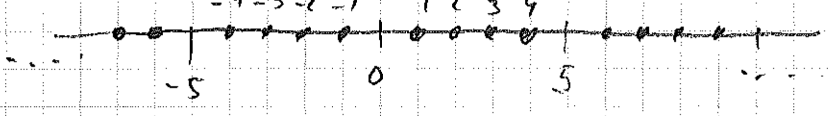
8a. Man har att (Obs: $\omega = 2\pi f$)

$$X(\omega) = 7 \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(f+300) + \delta(f-300)\right) + 9 \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(f+400) - \delta(f-400)\right) e^{-17{,}5 i f/400} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \delta(f-a) \cdot g(f) = \\ = \delta(f-a) g(a) \end{array} \right] = \frac{7}{2}\left(\delta(f+300) + \delta(f-300)\right) + \frac{9}{2}\left(e^{-17{,}5i}\delta(f+400) - e^{17{,}5i}\delta(f-400)\right)$$

Frekvensinnehållet för $X(f)$ är därför ± 300 och ± 400 Hz

Sampling av $x(t)$ med samplefrekvensen f_s ger en signal vars frekvensinnehåll är den f_s-periodiska fortsättningen till X:s frekvensinnehåll. Om $f_s = 500$ Hz så får man frekvensinnehållet $\pm 300 + n500$ Hz och $\pm 400 + n500$ Hz (n heltal)



8 forts. Vid applicering av lågpassfiltret tappas alla frekvenser utanför intervallet $-500 < f < 500$

Återstår frekvenserna ± 100, ± 200, ± 300 och ± 400 Hz

Svar: $\{\pm 100, \pm 200, \pm 300, \pm 400\}$ Hz

8b. Den samplade signalens fouriertransform =
$= f_s \cdot$ (f_s-periodiska fortsättningen till $X(f)$)

För att $y(t) = kx(t)$, dvs $Y(f) = kX(f)$, så måste $x(t)$ och $y(t)$ ha samma frekvensinnehåll. Detta innebär att alla bidragen till den f_s-periodiska fortsättningen till $X(f)$ måste ligga utanför 500 Hz-bandet, dvs f_s måste väljas så att

$-400 + f_s > 500$, $-300 + f_s > 500$, $400 - f_s < -500$ och $300 - f_s < -500$, dvs $f_s > 900$

För dessa f_s-värden, så gäller att

$$Y(f) = f_s \cdot X(f) \Leftrightarrow y(t) = f_s \cdot x(t)$$

Svar: $f_s > 900$ Hz