Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 5 juni 2007, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p.
ECTS-betyg: A: 26 – , B: 23 – 25, C: 20 – 22, C: 17 – 19, E: 14 – 16, F: 0 – 13.
11 – 13p berättigar till en kompletterande tentamen upp till betyget 3 (E).

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Man får veta att ekvationen $x^2 y'' - 6x y' + 12 y = 2x^2$
bland sina lösningar har de tre funktionerna
$$y_1 = x^2, y_2 = x^2 + x^3 \text{ och } y_3 = x^2 + x^4$$
Bestäm ekvationens allmänna lösning. Motivera noga Ditt svar. (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Vilken funktion $x(t)$ har fouriertransformen
$$X(\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \ ?$$
Svaret får inte innehålla några integraler. (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Förenkla så långt som möjligt $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t)$, då
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{då } t \geq 0, \\ e^{3t}, & \text{då } t < 0. \end{cases}$$
Med $x'(t)$ och $x''(t)$ menas här de *generaliserade* derivatorna. (3p)

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$x \frac{dy}{dx} + (x-1)\, y = e^{-x}$$
som uppfyller villkoret $y(1/2) = 0$. (3p)

5. Lös ekvationen
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau)\, d\tau$$
då $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (3p)

6. a. Avgör stabiliteten hos jämviktslösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ till systemet
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$ (2p)

b. Finn en matrisvärd funktion $\boldsymbol{A}(t)$ sådan, att
$$\det(\boldsymbol{A}(t)) \neq 0$$
och
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$
för alla lösningar $\boldsymbol{x}(t)$ till systemet i a-uppgiften. (4p)

Var god vänd!

7. Man vet om serien

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{int}, \; -\infty < t < \infty,$$

att den för t i intervallet $-\pi < t < \pi$ är $= (\operatorname{sign} t) \cdot \cos 2t$.

a. Bestäm koefficienterna c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ samt även den reella fourierutvecklingen av $s(t)$. (5p)

b. Beräkna exakt $s(3\pi/2)$. (1p)

Svaren får inte innehålla några integraler eller serier.

(*Anmärkning*: Uppgiften b. kan lösas även om man inte löst a-uppgiften.)

8. Signalen

$$x(t) = 7 \cos 600\pi t + 9 \sin (800\pi t - 17{,}5), \; t \text{ mätt i sekunder,}$$

samplas med en sampelfrekvens på f_s Hz. Den samplade signalen bearbetas med ett idealt låg-passfilter som släpper igenom alla frekvenser under en viss nivå 500 Hz ograverade, medan alla frekvenser över denna nivå inte släpps igenom alls. Den resulterande signalen benämner vi $y(t)$.

a. Om $f_s = 500$, vilket är då frekvensinnehållet i signalen $y(t)$?
(Med frekvensinnehållet till en signal $y(t)$ menas mängden av frekvenser ω för vilka signalens fouriertransform $Y(\omega) \neq 0$.) (3p)

b. För vilka värden på samplingsfrekvensen f_s är $y(t)$ proportionell mot $x(t)$, dvs. $y(t) = k \cdot x(t)$ för någon konstant k? (3p)

Motivera noga Dina svar.

Lycka till!