

Lösningsskisser till tentamen 080414 för SF1634 för T2

- ① Vi reducerar ekvationens ordning genom att sätta $y = e^x z$, vilket innebär att $y' = e^x(z + z')$ och $y'' = e^x(z + 2z' + z'')$

Insättes detta i den givna ekvationen får man

$$xe^x(z + 2z' + z'') - (x+1)e^x(z + z') + e^x z = 0,$$

$$\Leftrightarrow xz'' + (2x - x - 1)z' + \underbrace{(x - x - 1 + 1)}_{=0} z = 0,$$

$$\Leftrightarrow z' = 0 \text{ eller } \frac{z''}{z'} = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow [\text{integrera den senare ekvationen}]$$

$$\Leftrightarrow z' = 0 \text{ eller } \ln|z'| = \ln x - x + C \Leftrightarrow z' = A x e^{-x}, \quad \downarrow = 1 e^C \text{ eller } 0.$$

$$\Leftrightarrow z = A \int x e^{-x} dx = A(x+1)e^{-x} + B,$$

$$\text{dvs. } y = e^x z = A(x+1) + B e^x.$$

Svar: $y = A(x+1) + B e^x.$

- ② Ekvationen kan skrivas

$$y(t) = t + \frac{1}{6} t^3 * y(t),$$

där * betecknar Laplace-faltning.

Laplace-transformering ger

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{s^4} \cdot Y(s),$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{s^4}\right) Y(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} =$$

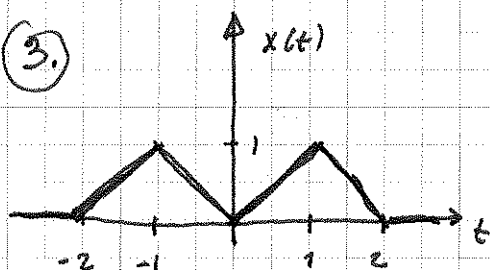
$$= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}; \text{ Identifiering och/eller "handpolering"}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = 0, D = \frac{1}{2},$$

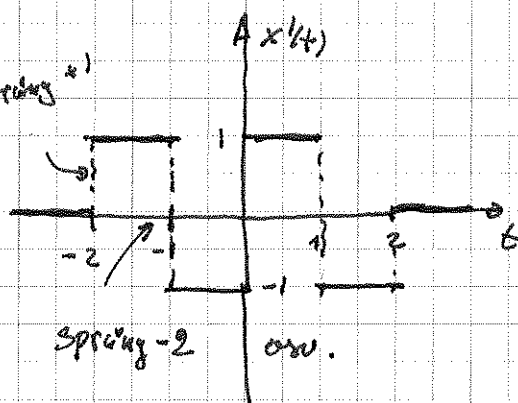
$$\text{dvs. } Y(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t.$$

Svar: $y = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} \sin t \left(= \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t) \right).$

(3.)

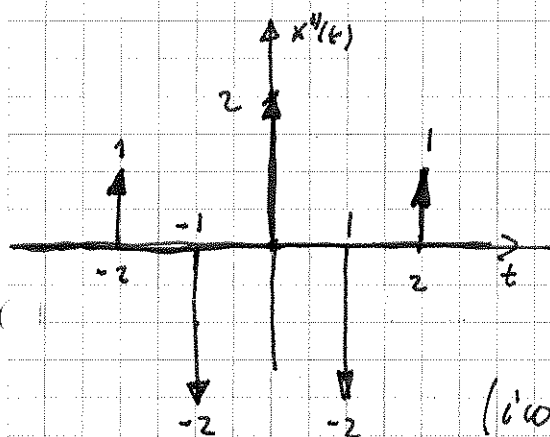


Sprung +1



Sprung -2

anw.



$$\Rightarrow x'' = \delta(t+2) - 2\delta(t+1) + 2\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2).$$

Fouriertransformierung ger. nu.

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \tilde{X}(\omega) &= e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} + 2 - 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega} \\ &= 2\cos 2\omega - 4\cos \omega + 2, \end{aligned}$$

$$\text{d.h.: } \tilde{X}(\omega) = 2 \frac{2\cos \omega - \cos 2\omega - 1}{\omega^2}.$$

$$\text{Sour: } \tilde{X}(\omega) = 2 \frac{2\cos \omega - \cos 2\omega - 1}{\omega^2}.$$

(4.) Variante I (Eigenwertmethoden)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

$$\text{Nun } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Systemmatrix.}$$

Systemmatrix eigenwörter ges. ab

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 2.$$

Zugehörige Eigenvektoren

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 + 2v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4 forts.

Systemets allmänna lösning är därför

$$\bar{x}(t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2e^{-t} \\ -2e^{2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret är uppfyllt om

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ varao}$$

$$\bar{x}(t) = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 2e^{2t} \\ 4e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \underline{\text{Svar}}$$

Variant II (Laplacetransformering)Låt $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ och $\bar{X}(s), \bar{Y}(s)$ vara Laplacetransformerna för $x(t)$ och $y(t)$.

Transformering ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\bar{X}(s) - 0 \\ s\bar{Y}(s) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2s & s \\ s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2s & s \\ s & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2(s+1) & s+1 \\ s & s-1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{varao} \quad \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s+1) & s+1 \\ s & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} s-1 & -(s+1) \\ -s & 2(s+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{där } \Delta = 2(s+1)(s-1) - s(s+1) = (s+1)(s-2).$$

$$\text{Alltså} \quad \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \frac{3}{(s+1)(s-2)} \begin{pmatrix} -2 \\ s+2 \end{pmatrix}.$$

4 forts.

Man får $\bar{X} = \frac{-6}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2e^{-t} - 2e^{2t} = x(t).$

$\bar{Y} = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -e^{-t} + 4e^{2t} = y(t).$

Svar: $\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 2e^{2t} \\ 4e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix}.$

5. a. Faktorisering av polynom i H.L. ger

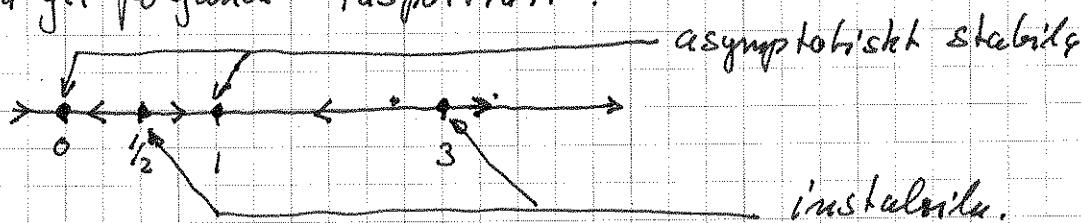
$$\frac{dy}{dx} = (2y-1) \cdot y(y-1)(y-3).$$

Jämviktslösningarna utgörs av detta polynoms nollställen, alltså: $0, \frac{1}{2}, 1$ och 3 .

Teckenstudium av $\frac{dy}{dx}$:

y	0	$\frac{1}{2}$	1	3			
$\frac{dy}{dx}$	+	0	-	0	+	0	+

Detta ger följande "fasporträtt":



Svar a: Jämviktslösningar: $y = 0, \frac{1}{2}, 1$ och 3 .

0 och 1 är asymptotiskt stabila,

$\frac{1}{2}$ och 3 är instabila.

b. $y = 1$ är den enda positiva jämviktspunkten.

Detta "attraktionsintervall" framgår av fasporträttet ovan:

$$\frac{1}{2} < y < 3$$

Svar b. $\frac{1}{2} < y(0) < 3$. Gränspunkten är då $y = 1$.

6.) Funktionen $u(x, t)$ skall för $t > 0$ uppfylla villkoren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad [1]$$

$$u(0, t) = 0 \quad [2], \quad u(\pi, t) = 0 \quad [3], \quad u(x, 1) = \sin 3x \quad [4].$$

Vi söker först funktioner på formen $u(x, t) = \underline{X}(x) \cdot T(t) \neq 0$, som uppfyller de homogena villkoren [1], [2] och [3]:

$$[1] \Rightarrow X'' \cdot T - t \underline{X} T' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{\underline{X}} = \frac{t T'}{T} = \text{konst} (= -1), \quad t_y$$

V.l. beror ej av t och $\frac{t T'}{T}$ är oberoende av x .

$$[2], [3] \Rightarrow \underline{X}(0) = \underline{X}(\pi) = 0.$$

Man får alltså att

$$\begin{cases} \underline{X}'' + \lambda \underline{X} = 0; & \underline{X}(0) = \underline{X}(\pi) = 0, \quad [5] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T'}{T} = -\frac{\lambda}{t}, \quad [6] \end{cases}$$

[5] har för $\lambda \leq 0$ bara den triviala lösningen $\underline{X}(x) = 0$, vilken anses uteslutas. För $\lambda > 0$ är ekvationens allmänna lösning

$$\underline{X} = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x. \quad \text{Randvillkoret } \underline{X}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

och randvillkoret $\underline{X}(\pi) = 0$ att $\underline{X} = B \sin nx$ där $n = \sqrt{\lambda}$ är ett heltal (> 0). För $\lambda = -n^2$ har ekv. [6] lösningar

$$\ln |T| = -n^2 \ln t + C \Rightarrow T = D \cdot t^{-n^2}$$

Sammanfattningsvis: Funktionerna $u_n(x, t) = B_n t^{-n^2} \sin nx$ satisfierar de homogena villkoren [1], [2] och [3]. Detsamma gäller de ^{gen} summorna

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^{-n^2} \sin nx.$$

Villkoret $u(x, 1) = \sin 3x$ är uppfyllt om dessutom

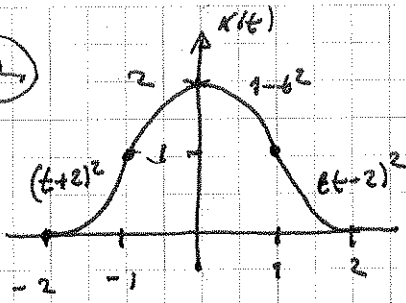
$$\sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx,$$

dvs om $B_n = 0$ då $n \neq 3$ och $B_3 = 1$.

Alltså

$$\text{Svar: } u(x, t) = t^{-9} \sin 3x.$$

7a.



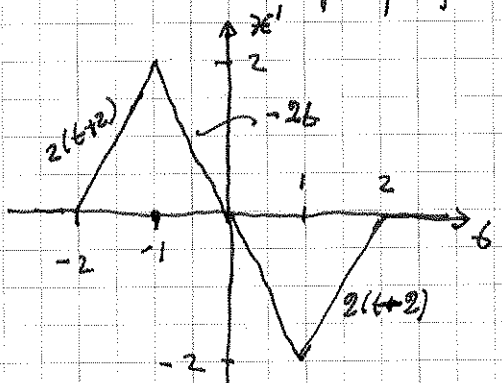
$$x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \leq 1, \\ (t-2)^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ (t+2)^2, & -2 \leq t \leq -1. \end{cases}$$

Vi bestämmer först motsvarande komplexa fourierserieutveckling.

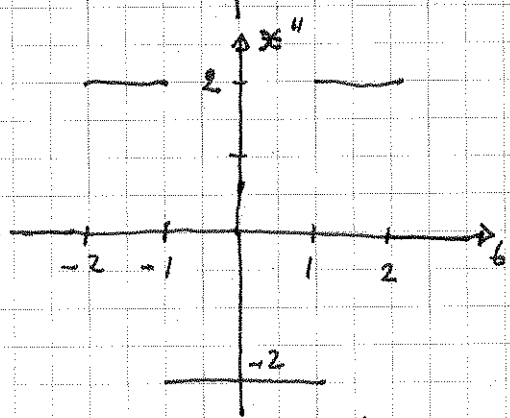
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{\pi i n t}{2}}. \text{ Koefficienterna } c_n = \frac{1}{4} \underline{X}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ där } \underline{X} \text{ är}$$

$$\text{fouriertransformen av } x(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases} \text{ denna transform}$$

kan erhållas på följande vis:



$$x'(t) = \begin{cases} -2t, & |t| \leq 1, \\ 2(t-2), & 1 \leq t \leq 2, \\ 2(t+2), & -2 \leq t \leq -1, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$



$$x''(t) = \begin{cases} -2, & |t| \leq 1, \\ 2, & 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

varav $x'''(t) = \{0\} + 2\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 4\delta(t-1) - 2\delta(t-2).$

Fouriertransformering av denna likhet ger

$$\begin{aligned} (i\omega)^3 \underline{X}(\omega) &= 2e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 4e^{-i\omega} - 2e^{-2i\omega} = \\ &= (i\omega)^3 \underline{X}(\omega) = 4i \sin 2\omega - 8i \sin \omega, \end{aligned}$$

der $\underline{X}(\omega) = \frac{4}{\omega^3} (2 \sin \omega - \sin 2\omega), \omega \neq 0,$

$$\begin{aligned} \text{och } \underline{X}(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{X}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{4}{\omega^3} \left[2\left(\omega - \frac{\omega^3}{6} + o(\omega^5)\right) - \left(2\omega - \frac{(2\omega)^3}{6} + o(\omega^5)\right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{4}{\omega^3} \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) \omega^3 + o(\omega^5) \right] = 4. \end{aligned}$$

(7a)

ur detta får vi fourierkoefficienterna

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{\pi^3 \pi^3} (2 \sin \frac{n\pi}{2} - \underbrace{\sin n\pi}_{=0}) = \frac{16}{\pi^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}, & \text{om } n \neq 0 \\ \frac{1}{4} \cdot 4 = 1, & \text{om } n = 0 \end{cases}$$

För motsvarande reella utveckling:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{2} t + b_n \sin \frac{n\pi}{2} t),$$

gäller $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = \frac{32}{\pi^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}, \text{ om } n \neq 0 \text{ och } = 2 \text{ om } n = 0,$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = 0.$$

Men $\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ jämnt} \neq 0 \\ (-1)^k, & \text{om } n = 2k+1, k=0,1,2,\dots \end{cases}$

Vi får

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{\pi^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} t = 1 + \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cos((2k+1)\frac{\pi}{2} t).$$

Således: $x(t) = 1 + \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi t\right).$

(7b)

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = S.$$

Enligt svaret för 7a gäller om man där sätter $t=0$:

$$x(0) = 1 + \frac{32}{\pi^3} \cdot S$$

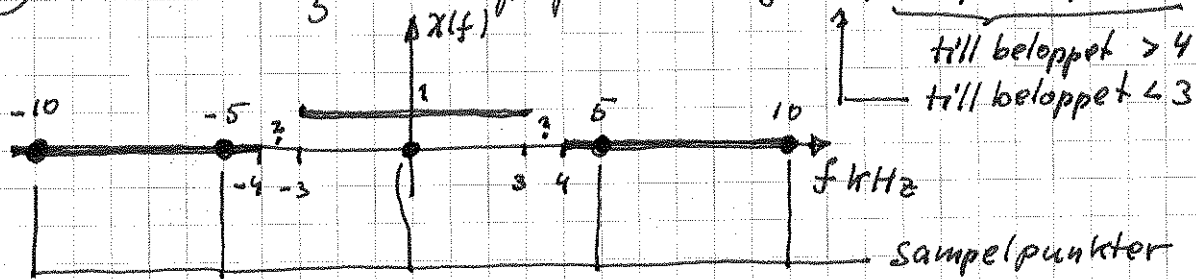
Men $x(0) = 2$ enligt texten, alltså $S = \frac{\pi^3}{32} (2-1) = \frac{\pi^3}{32}$. V.S.B.

(8.)

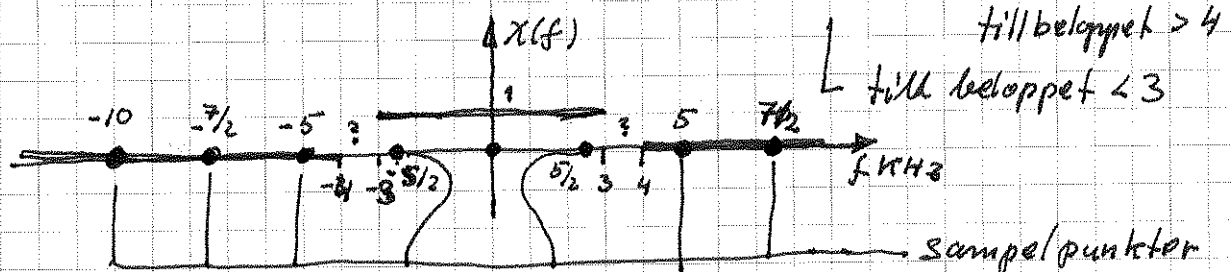
$y(t)$ är den L -periodiska fortsättningen av $x(t)$, varför fouriertransformen $Y(f)$ är sampelfunktionen av $\frac{1}{L} X(f)$ med sampelavståndet $\frac{1}{L}$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nL) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nL) \xrightarrow{FT} X(f) \cdot \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{n}{L}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} X(\frac{n}{L}) \delta(f-\frac{n}{L}). (*)$$

8 forls.

(a.) För $L = \frac{1}{5}$ är sampelpunkterna $f = 0, \pm 5, \pm 10, \dots$ dvs $X(0) = 1$ och $X(5n) = 0$ då $n \neq 0$. Alltså är enligt (*) ovan:

$$Y(f) = 5 \cdot \delta(f), \text{ dvs. } y(t) = 5 \cdot 1 \text{ (konstant).}$$

(b.) För $L = \frac{2}{5}$ är sampelpunkterna $f = 0, \pm \frac{5}{2}, \pm 5, \pm \frac{7}{2}, \pm 10, \dots$ dvs. $X(0) = X(\pm \frac{5}{2}) = 1$ och $X(\frac{5n}{2}) = 0$ om $|n| \geq 2$.

Alltså är enligt (*) ovan:

$$Y(f) = \frac{5}{2} \cdot (\delta(f) + \delta(f - \frac{5}{2}) + \delta(f + \frac{5}{2})) \text{ varav}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} (1 + e^{2\pi i \cdot \frac{5}{2} t} + e^{-2\pi i \cdot \frac{5}{2} t}) = \frac{5}{2} (1 + 2 \cos 5\pi t).$$

Svar: (a.) $y(t) = 5$, (b.) $y(t) = \frac{5}{2} + 5 \cos 5\pi t$.

Alternativt motivering:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nL) = \left[L\text{-periodisk funktion} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i \frac{n}{L} t} \text{ där } C_n = \frac{1}{L} \int_0^L X\left(\frac{n}{L}\right) =$$

$$\frac{1}{L} X\left(\frac{n}{L}\right).$$

↑ frekv. mätt i kHz

$$\text{J}_a \text{ för man } L = \frac{1}{5}, C_n = 5 \begin{cases} 1, & \text{om } n=0, \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases} \Rightarrow y(t) = 5$$

$$\text{J}_b \text{ för man } L = \frac{2}{5}, C_n = \frac{5}{2} \begin{cases} 1, & \text{om } n=0, \pm 1, \\ 0, & \text{om } |n| \geq 2 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} (1 + e^{5\pi i t} + e^{-5\pi i t}).$$