Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, SF1634 (f.d. 5B1207), Differentialekvationer II, för T2,
den 14 april 2008, kl 8.00 – 13.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för SF1634 (5B1207).

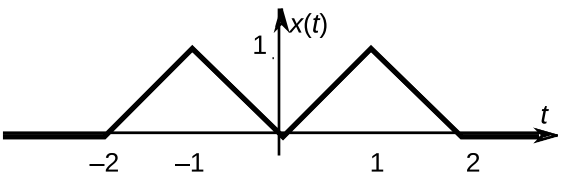
Betygsgränser (ECTS) inklusive bonus:
A: 26 – , B: 23 – 25, C: 20 – 22, D: 17 – 19, E: 14 – 16, Fx: 11 - 13, F: 0 – 10.
Fx berättigar till en kompletterande tentamen upp till betyget E.

Betygsgränser enl. äldre ordningen, inklusive bonus:
3: 14 – 19p, 4: 20 – 25p, 5: minst 26p.
11 – 13p berättigar till en kompletterande tentamen upp till betyget 3.

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Differentialekavationen
$$xy''(x) - (x+1)y'(x) + y(x) = 0$$
satisfieras av funktionen $y = e^x$. Bestäm i intervallet $x > 0$ ekvationens allmänna lösning. (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Bestäm $y(t)$ så att
$$y(t) = t + \frac{1}{6}\int_0^t (t-\tau)^3\, y(\tau)\, d\tau$$
Svaret får inte innehålla några integraler. (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p.*)
Grafen för funktionen $x(t)$, som är definierad för alla reella t, består av räta linjestycken enligt figuren:



Bestäm fouriertransformen av $x(t)$. . (3p)

4. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x},$$
som uppfyller begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (3p)

5. Givet den autonoma differentialekvationen
$$\frac{dy}{dx} = (2y-1)(y^3 - 4y^2 + 3y)$$
a. Ange jämviktslösningarna. Vilka av dem är asymptotiskt stabila och vilka är instabila? (2p)
b. Hur skall startvärdet $y(0)$ väljas för att $y(x)$ skall gå mot en positiv jämviktspunkt då $x \to \infty$? (2p)

Var god vänd!

6. Bestäm en funktion $u(x, t)$, $t > 0$, som uppfyller villkoren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0,\ u(x, 1) = \sin 3x. \qquad (5p)$$

7. a. Bestäm den reella 4-periodiska fourierserie vars summa är lika med

$$\begin{cases} 2 - t^2, & \text{då } |t| \le 1, \\ (|t| - 2)^2, & \text{då } 1 < |t| \le 2. \end{cases} \qquad (4p)$$

b. Använd resultatet från a-uppgiften för att bevisa att

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}. \qquad (1p)$$

8. Man vet om en signal $x(t)$, t mätt i millisekunder [ms], att den är bandbegränsad med bandbredden 4 kHz, dvs att dess fouriertransform $X(f) = 0$, då $|f| > 4$kHz.

Vidare vet man att $X(f) = 1$, då $|f| < 3$kHz.
För frekvenserna 3kHz $< |f| <$ 4kHz är transformens värden inte kända.
Bestäm ändock exakta uttryck för

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nL),$$

för det fall L är

a. $\frac{1}{5}$ [ms], (2p)

b. $\frac{2}{5}$ [ms]. (2p)

Svaren får inte innehålla oändliga serier eller integraler.

Lycka till!