Lösningar till tentamen, SF1634, Diffekv II
080603

(1.) Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. Vi använder integrerande-faktor-metoden. På "standardiserad" form lyder ekvationen

$$y' + \frac{x}{x^2+1}\,y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [*]$$

Integrerande faktor är $e^{\int \frac{x}{x^2+1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \sqrt{x^2+1}$

Multipliceras [*] med denna får man

$$\underbrace{\sqrt{x^2+1}\,y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,y}_{=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot y\right)} = 2x$$

Integration ger $\sqrt{x^2+1}\cdot y = x^2 + C$, dvs.

<u>Svar:</u> $y = \dfrac{x^2+C}{\sqrt{x^2+1}}$, C konstant

---

(2) Ekvationen är linjär, av 2:a ordningen och har konstanta koefficienter. Dessutom finns begynnelsevillkor. Vi använder oss av Laplacetransformering och får

$$s^2Y(s) - s\cdot 0 - 1 + 15(sY(s) - 0) + 56Y(s) = e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(s^2+15s+56)}_{=(s+7)(s+8)}Y(s) = 1 + e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s+7)(s+8)}\left(1 + e^{-2s}\right)$$

Men $\dfrac{1}{(s+7)(s+8)} = \dfrac{1}{s+7} - \dfrac{1}{s+8}$, varav

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+8}\right) + \left(\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+8}\right)e^{-2s}$$

Återtransformering ger, på grund av att,

$$\frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}$$

$$\frac{1}{s+a} e^{-2s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a(t-2)} u(t-2),$$

Svar: $y(t) = e^{-7t} - e^{-8t} + \left(e^{-7(t-2)} - e^{-8(t-2)}\right) u(t-2) =$

$$\left(= \begin{cases} e^{-7t} - e^{-8t} & \text{om } t \le 2 \\ e^{-7t}(1+e^{14}) - e^{-8t}(1+e^{16}) & \text{om } t > 2 \end{cases} \right)$$

---

3. Vi har att

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} t e^{it} \cdot e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t \cdot e^{(1-\omega)it}\, dt = \left[\begin{matrix}\text{partiell} \\ \text{integration}\end{matrix}\right] = \left[t \cdot \frac{e^{(1-\omega)it}}{(1-\omega)i} \right]_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-\omega)i} \cdot e^{(1-\omega)it}\, dt = \frac{1}{(1-\omega)i} \underbrace{\left(e^{(1-\omega)i} + e^{-(1-\omega)i} \right)}_{2\cos(1-\omega)} +$$

$$+ \left[\frac{1}{(1-\omega)^2} e^{(1-\omega)it} \right]_{-1}^{1} = \frac{2\cos(1-\omega)}{(1-\omega)i} + \frac{1}{(1-\omega)^2} \underbrace{\left(e^{(1-\omega)i} - e^{-(1-\omega)i} \right)}_{2i\sin(1-\omega)} =$$

$$= -\frac{2i\cos(1-\omega)}{(1-\omega)} + \frac{2i\sin(1-\omega)}{(1-\omega)^2} = \frac{2i}{(1-\omega)^2}\left(\sin(1-\omega) - (1-\omega)\cos(1-\omega) \right)$$

Svar: $X(\omega) = \dfrac{2i}{(1-\omega)^2}\left(\sin(1-\omega) - (1-\omega)\cos(1-\omega) \right)$

---

4. Vi utnyttjar att $x(t) * y(t) \xrightarrow{FT} X(\omega) \cdot Y(\omega)$ [1]

$\frac{dx}{dt} \xrightarrow{FT} i\omega X(\omega)$ [2] $\quad t\,x(t) \xrightarrow{FT} i\frac{dX}{d\omega}$ [3], $\quad e^{-|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2}{1+\omega^2}$ [4]

$\frac{d}{dt} e^{-|t|} = -\operatorname{sign} t \cdot e^{-|t|}$ [5] och $\frac{d}{d\omega} \frac{1}{1+\omega^2} = -\frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}$ [6]

Man har

$$\operatorname{sign} t \cdot e^{-|t|} \overset{[5]}{=} -\frac{d}{dt} e^{-|t|} \xrightarrow[{[2],[4]}]{FT} -i\omega \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$e^{-|t|} \xrightarrow[{[4]}]{FT} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\left(\operatorname{sign} t \cdot e^{-|t|}\right) * e^{-|t|} \xrightarrow[{[1]}]{FT} -\frac{2i\omega}{1+\omega^2} \cdot \frac{1}{1+\omega^2} =$$

$$= -\frac{2i\omega}{1+\omega^2} \overset{[6]}{=} i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{1+\omega^2} \xrightarrow[{[3][4]}]{FT^{-1}} t \cdot e^{-|t|};$$

Svar: $t e^{-|t|}$

---

5. a. En 2π-periodisk komplex fourierserie har formen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \text{ där } c_n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ är komplexa konstanter}$$

I vårt fall är $y(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \cdot \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \left[\text{konjugatregeln}\right]$

$= \frac{1}{8i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)\left(e^{it} + e^{-it}\right) =$

$= \frac{1}{8i}\left(-e^{-3it} - e^{-it} + e^{it} + e^{3it}\right)$, där man avläser att

$c_3 = c_1 = \frac{1}{8i}$ och $c_{-1} = c_{-3} = -\frac{1}{8i}$, medan $c_n = 0$ för övriga n.

Svar a: $c_3 = c_1 = -c_1 = -c_3 = \frac{1}{8i}$, $c_n = 0$ om $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots$

b. Parsevals formel för fourierserien $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

I detta speciella fall alltså

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^4 t = 2\pi\left(\left|-\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|-\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|\frac{1}{8i}\right|^2\right)$$

$$= 2\pi \cdot 4 \frac{1}{64} = \frac{\pi}{8}$$: Svar b.

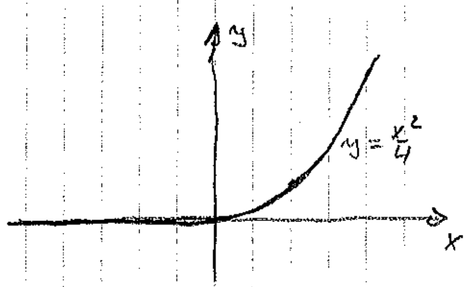
6. a. Ekvationen är separabel och av 1:a ordningen.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \iff \begin{cases} y = 0 \quad \text{eller} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \iff 2\sqrt{y} = x + C \end{cases}$$

Bivillkoret $y(2) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 + C$, dvs $C = 0$, varav $\sqrt{y} = \frac{x}{2}$ vilket för $x > 0$ är samma sak som att $y = \frac{x^2}{4}$

Svar a: $y = \frac{x^2}{4}$, $x > 0$

b. Enligt a så måste den sökta lösningen, för $x > 0$, vara $y = \frac{x^2}{4}$



Däremot satisfierar $y = \frac{x^2}{4}$ inte den givna ekvationen eller villkoret $\sqrt{y} = x$ för $x < 0$. (Ty $\sqrt{y} > 0$.)

Däremot uppfyller konstantfunktionen $y(x) = 0$ differentialekvationen då $x < 0$

Detta gör att

$$y(x) = \begin{cases} x^2/4, & \text{då } x > 0, \\ 0, & \text{då } x \leq 0, \end{cases}$$

uppfyller diff.ekv. och bivillkor i varje fall om $x \neq 0$, men också för $x = 0$, ty både höger- och vänsterderivata (0, resp $\left.\left(\frac{2x}{4}\right)\right|_{x=0}$) är $= 0$, dvs $\frac{dy}{dx}(0) = \sqrt{y(0)}$

Svar b: $y(x) = \begin{cases} x^2/4, & \text{då } x > 0 \\ 0, & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$

7. Vi använder egenvärdesmetoden:

I. Systemmatrisens egenvärden

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - 2 + 3 + (1-\lambda) - 2(1-\lambda) + 3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-3), \text{ dvs } \lambda = 0, -1 \text{ eller } +3$$

II. Motsvarande egenvektorer:

$\lambda = 0$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ egenvektorerna $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

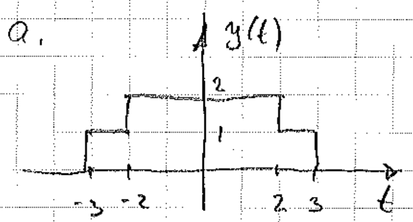
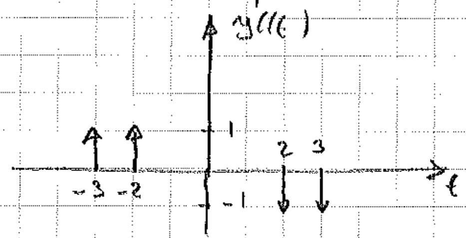
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{egenvektorerna } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

egenvektorerna $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Varav

Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + k_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t}$

(8.) a.  $\Rightarrow$ 

(6.)

$$y'(t) = \delta(t+3) + \delta(t+2) - \delta(t-2) - \delta(t-3)$$

Men $\delta(t+a) \xrightarrow{FT} e^{ia\omega}$ och $y'(t) \xrightarrow{FT} i\omega \bar{Y}(\omega)$

alltså

$$i\omega \bar{Y}(\omega) = e^{3i\omega} + e^{2i\omega} - e^{-2i\omega} - e^{-3i\omega} =$$

$$= 2i(\sin 3\omega + \sin 2\omega)$$

dvs. $\bar{Y}(\omega) = \frac{2}{\omega}(\sin 3\omega + \sin 2\omega)$, då $\omega \neq 0$

För $\omega = 0$; $\bar{Y}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \underbrace{e^{-i\omega \cdot 0}}_{=1} dt = \left| \begin{matrix} \text{Arean under} \\ \text{grafen} \end{matrix} \right| = 10.$

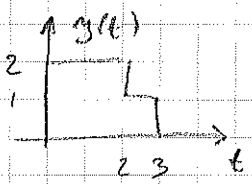
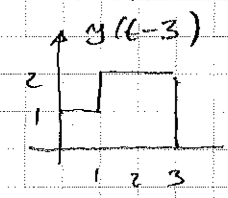
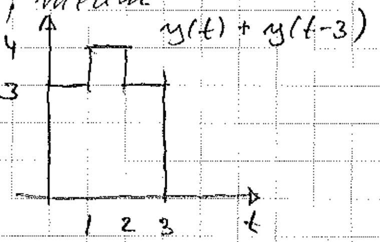
(Alternativt $\bar{Y}(0) = \lim_{\omega \to 0} \bar{Y}(\omega) = 2 \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin 3\omega}{\omega} + 2 \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin 2\omega}{\omega} =$

$= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 10.$)

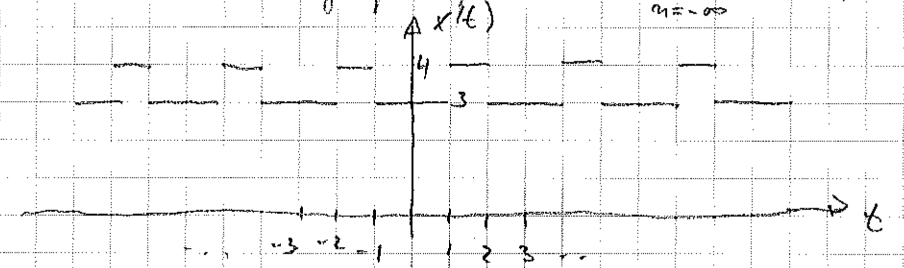
Svar a: $\bar{Y}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}(\sin 3\omega + \sin 2\omega), & \text{då } \omega \neq 0 \\ 10, & \text{då } \omega = 0 \end{cases}$

---

b. För att ta reda på grafens utseende, räcker det att skissa den över en period, t.ex. $0 < t < 3$. I det intervallet är $y(t-3n) = 0$ om $n \neq 0$ och 1, medan

 och  varav 

Dvs. den sökta grafen för $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-3n)$



: Svar b

(8 forts)

c. Enligt fourierserieteorin har man att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-3n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{3}t}, \text{ där } c_n = \frac{1}{3} Y\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Enligt a. får man då att

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2n\pi}\left(\underbrace{\sin n\pi}_{=0} + \sin\frac{4\pi}{3}n\right) = \frac{\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{3}n, & \text{om } n \neq 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 10 & \text{, om } n = 0 \end{cases}$$

Svar c: $x(t) = \frac{10}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{4\pi}{3}n\right) \cdot e^{\frac{2\pi i n}{3}t}$

---

d. Inspektion av grafen för $y(t)$ ger att t.ex. den 5-periodiska förbättringen i intervallet $0 < t < 5$ ges av

$$y(t) + y(t-5) = \begin{cases} 2+0 = 2, & \text{då } 0<t<2 \\ 1+1 = 2, & \text{då } 2<t<3 \\ 0+2 = 2, & \text{då } 3<t<5 \end{cases} = 2$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-5n)$ antar alltså bara värdet 2. $P=5$ duger som svar.

[Anmärkning: Man kan också analysera fram för vilka $p>0$ som den p-periodiska förbättringen är konstant:

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{p}t}$ konstant $\Leftrightarrow$ $c_n = 0$ då $n \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{p} Y\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = 0$ då $n \neq 0$.

Men $Y\left(\frac{2\pi n}{p}\right) = \left[\text{enl. a}\right] = \frac{p}{\pi n}\left(\sin\frac{6n\pi}{p} + \sin\frac{4n\pi}{p}\right) = \left|\begin{matrix}\sin\alpha + \sin\beta = \\ = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\end{matrix}\right| =$

$= \frac{p}{\pi n} \cdot 2\sin\frac{5n\pi}{p} \cdot \cos\frac{n\pi}{p} = 0$ om och endast om $\frac{5}{p}$ = heltal, (då är $\sin\frac{5n\pi}{p} = 0$) eller om $\frac{n}{p} = \frac{1}{2}$ + heltal för alla $n \neq 0$, då skulle $\cos\frac{n\pi}{p} = 0$, men detta inträffar inte för något p, ty om $(n=1)$ $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ + heltal, så är $\frac{2}{p}$ = heltal, vilket motsägs av $(n=2)$: $\frac{2}{p} = \frac{1}{2}$ + heltal).

De p-värden som duger är alltså $p = \frac{5}{m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$]

Svar d: T.ex $p=5$ (Mera allmänt $p = \frac{5}{m}$, $m = 1, 2, 3 \ldots$