KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II, 20 maj 2009

1. Vi söker den allmänna lösningen i intervallet $x > 0$ till ekvationen $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = x^2 e^x$, då vi vet att $y(x) = e^x$ är en lösning till $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$.

Lösning: Reduktion av ordningen. $y(x) = z(x)e^x$ ger $y' = (z'+z)e^x$, $y'' = (z''+2z'+z)e^x$. Ekvationen ger $(xz'' + z')e^x = x^2 e^x$, dvs $(xz')' = x^2$, så $xz' = \frac{x^3}{3} + c_1$ och $z' = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$, så $(x > 0)$ $z(x) = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$, där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter. Det ger

Svar: Allmänna lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \frac{x^3}{9}e^x + c_1 \ln x\, e^x + c_2 e^x}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ godtyckliga konstanter.

---

2. Funktionen $f(t) = \frac{1}{1+t+t^4}$ har fouriertransformen $g(\omega)$. Vi söker fouriertransformen av $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)g(2\tau)\,d\tau$.

Lösning: $h(t)$ är faltningen av $g(t)$ och $g(2t)$, så den sökta $H(\omega)$ är produkten av deras fouriertransformer. Transformen av $g(t)$ är $2\pi f(-\omega)$ (dualitet) och då $g(2t)$:s transform $\frac{1}{2}2\pi f(-\frac{\omega}{2})$. Alltså $H(\omega) = 2\pi^2 f(-\omega)f(-\frac{\omega}{2})$,

Svar: Den sökta $\boldsymbol{H(\omega) = 2\pi^2 \frac{1}{(1-\omega+\omega^4)(1-\frac{\omega}{2}+(\frac{\omega}{2})^4)}}$.

---

3. Vi söker den komplexa fourierserien för $x(t)$, 2-periodisk med $x(t) = t^2$ då $-1 \le t \le 1$. Vi skall också visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Lösning: Vi bestämmer (de flesta) koefficienterna c_n i $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ genom att först beräkna den generaliserade derivatan $x''(t)$. (Man kan också använda uttrycken för c_n, partialintegrera etc.)
$x(t)$ är kontinuerlig, så $x'(t) = \{x'(t)\}$, "klassiska derivatan", $x'(t) = 2t$, $-1 < t < 1$ och 2-periodisk.
Sprången i $x'(t)$ (-4 i $t =$ udda heltal) ger δ-funktioner, så $x''(t) = 2-4\delta(t+1)-4\delta(t-1)-\dots$ (2-periodisk).
$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ ger $x''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in\pi)^2 e^{in\pi t}$ (som generaliserad funktion). Men uttrycken för koefficienterna för $x''(t)$ ger då $-n^2\pi^2 c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x''(t)e^{-in\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 2e^{-in\pi t}\,dt + \frac{1}{2}(-4)e^{-in\pi 1}$ (intervallet valt för att undvika δ-funktioner i gränserna), vilket för $n \ne 0$ ger $c_n = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$.
$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 e^{-i0\pi t}\,dt = \frac{1}{3}$, så,

Svar: Den sökta serien är $\boldsymbol{\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}}$, med $\boldsymbol{c_n = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}}$, då $\boldsymbol{n \ne 0}$, $\boldsymbol{c_0 = \frac{1}{3}}$.

Parsevals relation ger $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{1}{5}$, så $\frac{1}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 n^4}$, dvs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}) = \frac{\pi^4}{8}\frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}$, **saken är klar**.

---

4. Vi söker alla lösningar $x(t)$, $y(t)$ till problemet $\begin{cases} x' + 2x = y \\ y' - 4y = -5x \\ x(0) = 1,\ y(0) = 13. \end{cases}$

Lösning: Ekvationerna kan skrivas $\binom{x}{y}' = \mathbf{A}\binom{x}{y}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristisk ekvation: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, så $\lambda_{1,2} = 3, -1$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \binom{1}{5}$,
för $\lambda_2 = -1$ får vi: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \binom{1}{1}$.
Den allmänna lösningen till ekvationen blir $\binom{x}{y} = \sum_{i=1}^{2} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{k}_i = c_1 e^{3t}\binom{1}{5} + c_2 e^{-t}\binom{1}{1}$.
Begynnelsevillkoret bestämmer konstanterna c_1, c_2: $c_1\binom{1}{5} + c_2\binom{1}{1} = \binom{1}{13}$, med lösning $c_1 = 3$, $c_2 = -2$.

Svar: Enda lösning är $\boldsymbol{x(t) = 3e^{3t} - 2e^{-t}}$, $\boldsymbol{y(t) = 15e^{3t} - 2e^{-t}}$.

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen blir (med begynnelsevillkoren) $s\mathbf{X} - \binom{1}{13} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\binom{x}{y}\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x\} \\ \mathcal{L}\{y\} \end{pmatrix}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1}\binom{1}{13}$.
$(sI-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 5 & s-4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-3)(s+1)}\begin{pmatrix} s-4 & 1 \\ -5 & s+2 \end{pmatrix}$, så $\mathbf{X} = \frac{1}{(s-3)(s+1)}\begin{pmatrix} s+9 \\ 13s+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{s-3} - \frac{2}{s+1} \\ \frac{15}{s-3} - \frac{2}{s+1} \end{pmatrix}$.
Återtransformering ger samma svar som ovan.

---

5. Ett LTI-system har pulssvarsfunktionen $\mathcal{U}(t)\,e^{-t}$. Vi söker utsignalen då insignalen är a. $x(t) = \sin 2t,\ -\infty < t < \infty$ och b. $x(t) = \mathcal{U}(t)\,\sin 2t$. $\mathcal{U}(t)$ är Heavisides stegfunktion.

Lösning: LTI-system, pulssvar $h(t)$, insignal $x(t)$ ger utsignal $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$, i vårt fall $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)e^{-(t-\tau)}\,d\tau$. (Man kan integrera direkt, men vi använder här transformer.)

a. $x(t) = \sin 2t$ ger $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\sin 2\tau\,d\tau$. Faltning svarar mot produkt av transformer, så fouriertransformen $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = -\pi i(\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2))\frac{1}{1+i\omega} = -\pi i(\frac{1}{1+2i}\delta(\omega-2) - \frac{1}{1-2i}\delta(\omega+2)) = -\pi i(\frac{1-2i}{5}\delta(\omega-2) - \frac{1+2i}{5}\delta(\omega+2)) = -\pi i\frac{1}{5}(\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2)) - \pi\frac{2}{5}(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2))$, så

Svar a: Utsignalen blir $\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t}$.

b. $x(t) = \mathcal{U}(t)\,\sin 2t$ ger då $t \le 0$ att $y(t) = 0$ och då $t \ge 0$ att $y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin 2\tau\,d\tau$, en "laplacefaltning". Faltning svarar mot produkt även av laplacetransformer, så $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2}{s^2+4}\frac{1}{s+1} = \frac{\frac{2}{5}}{s+1} + \frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{5}s}{s^2+4}$. Återtransformering ger

Svar b: Utsignalen blir $\boldsymbol{y(t) = \mathcal{U}(t)\,(\frac{1}{5}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}e^{-t})}$.

---

6. $f(x) = x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ och $\pi - x,\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi$. Vi söker i a. de generaliserade derivatorna $g'(x)$ och $g''(x)$ för $g(x)$ (den udda, 2π-periodiska fortsättningen av f) och $f(x)$:s sinusserie. I b. skall vi finna lösningen till problemet $t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (t^2+1)\frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ 0 < t,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 < t,\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \pi$, genom att utveckla $u(x,t)$ som en sinusserie i x, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx$.

Lösning: $g(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ och 2π-periodisk. Den är kontinuerlig, så $g'(x) = \{g'(x)\}$, "klassiska derivatan". Man får $\boldsymbol{g'(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}}$ **och 2π-periodisk.** g' är styckvis konstant, så $\{g''(x)\} = 0$ och sprången i g' ger δ-funktioner i g'', $\boldsymbol{g''(x) = -2\delta(x-\frac{\pi}{2}) + 2\delta(x+\frac{\pi}{2})}$ **och 2π-periodisk.** $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ger $g''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2)b_n\sin nx$, så $-n^2 b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g''(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}(-2)\sin\frac{n\pi}{2}$ och

$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{\pi n^2}\begin{cases} 0, & n \text{ jämnt} \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$,

Svar a: $\boldsymbol{g'(x)}$ och $\boldsymbol{g''(x)}$ som ovan och $\boldsymbol{b_n = \frac{4}{\pi n^2}\begin{cases} 0, & n \text{ jämnt} \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}}$.

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} t(-n^2)c_n(t)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(t^2+1)c_n'(t)\sin nx$ insatt i ekvationen. Randvillkoren blir automatiskt uppfyllda. Koefficienterna i sinusserien är entydigt bestämda, så med begynnelsevillkoret får vi att $u(x,t)$ löser problemet omm $(t^2+1)c_n' = -n^2 t c_n,\ c_n(0) = b_n$ (från a). Detta kan lösas som en separabel eller en linjär ekvation. Resultatet blir $c_n(t) = b_n(t^2+1)^{-\frac{n^2}{2}}$ och

Svar b: Lösningen är $\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{t^2+1}^{\,-n^2}\sin nx}$, $\boldsymbol{b_n}$ enligt svar a.

---

7. Vi söker alla $y(t),\ t \ge 0$, (med $y(t),\ y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig) som uppfyller $y''(t) + y(t) = \delta(t) + 4\int_0^t \cos(t-\tau)\,y'(\tau)\,d\tau$, för alla $t \ge 0$ och $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Lösning: Laplacetransformation ger (p.g.a. villkoret på $y(t)$ och att transformen av faltningen är produkten av transformerna) $s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 1 + 4\frac{s}{s^2+1}(sY - y(0))$, så $2 = (s^2+1-\frac{4s^2}{s^2+1})Y = \frac{(s^2-1)^2}{s^2+1}Y$ och $Y(s) = \frac{2(s^2+1)}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger svaret.

Svar: $\boldsymbol{y(t) = t(e^t + e^{-t})(= 2t\cosh t)}$.

---

8. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \frac{\sin^2 3\omega}{\cosh\omega}$.
Vi söker det största värdet på L som gör $y_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nL)$, $x(t)$:s L-periodiska fortsättning, $= 0$ för alla t.

Lösning: $y_L(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nL)$ skall vara 0 för alla t, dvs $Y_L(\omega) = 0$ för alla ω. $Y_L(\omega) = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L}) = \frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})$, som är 0 för alla ω omm $X(n\frac{2\pi}{L}) = 0$, alla $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$
Det betyder precis att för alla n: $\sin(3n\frac{2\pi}{L}) = 0$, dvs $\frac{6n}{L}$ ett heltal. Så $\frac{6}{L}$ är ett heltal och

Svar: Det största sådana värdet är $\boldsymbol{L = 6}$.
