**KTH Matematik**

**Tentamen onsdagen den 20 maj 2009 för T**
**SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II**

**Skrivtid:** 14.00–19.00

**Examinator:** Bengt Ek, tel 790 6951.
**Tillåtna hjälpmedel:** Mathematics Handbook BETA, Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

**Betygsgränser:**

| För betyg | A(/5) | B | C(/4) | D | E(/3) | FX(/K) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| krävs | 26 | 23 | 20 | 17 | 14 | 11 | poäng (inklusive bonus) |

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1207.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

**För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.**

**Den som vt09 blivit godkänd på ks 1, ks 2 eller bonusuppgiften har automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift 1, 2 respektive 3.**

**1.** (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks1.)* Man noterar att ekvationen $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$ har en lösning $y(x) = e^x$. Använd detta för att finna den allmänna lösningen i intervallet $x > 0$ till ekvationen

$$xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = x^2e^x.$$

**2.** (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks2.)* Låt funktionen $f(t) = \frac{1}{1+t+t^4}$ ha fouriertransformen $g(\omega)$. Bestäm fouriertransformen av funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)g(2\tau)\,d\tau.$$

Du behöver inte bestämma funktionerna $g$ och $h$.

**3.** (3p) *(Bara för dem som inte klarat bonusuppgiften (lila lappen).)* Funktionen $x(t)$ är 2-periodisk och uppfyller $x(t) = t^2$ då $-1 \leq t \leq 1$.
Finn $x(t)$:s komplexa fourierserieutveckling och visa med hjälp av den att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

*V.g. vänd!*

**4.** (3p) Finn alla lösningar $x(t),\ y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} x' + 2x = y \\ y' - 4y = -5x \\ x(0) = 1,\ y(0) = 13. \end{cases}$$

**5.** Ett LTI-system har pulssvarsfunktionen $\mathcal{U}(t)\, e^{-t}$.
**a.** (2p) Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen är $x(t) = \sin 2t,\ -\infty < t < \infty$?
**b.** (2p) Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen är $x(t) = \mathcal{U}(t)\ \sin 2t$?
$\mathcal{U}(t)$ betecknar Heavisides stegfunktion.

**6a.** (3p) Låt $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$.
Bestäm de generaliserade derivatorna $g'(x)$ och $g''(x)$ för $g(x)$, den udda, $2\pi$-periodiska fortsättningen av $f$.
Använd också $g''(x)$ för att bestämma $f$:s sinusserie, dvs koefficienterna $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ så att $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,\ 0 \le x \le \pi$.
**b.** (3p) Lös problemet

$$\begin{cases} t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (t^2+1)\frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

genom att för varje $t$ utveckla $u(x,t)$ som en sinusserie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx$.
Delar av uppgift b. kan göras utan att uppgift a. har lösts.

**7.** (5p) Finn alla $y(t),\ t \ge 0$, (med $y(t)$, $y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig) som uppfyller

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \delta(t) + 4\int_0^t \cos(t-\tau)\, y'(\tau)\, d\tau, \text{ för alla } t \ge 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion.

**8.** (5p) Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \frac{\sin^2 3\omega}{\cosh \omega}$.
Låt $y_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nL)$ vara $x(t)$:s $L$-periodiska fortsättning.
Finn det största värdet på $L$ så att $y_L(t) = 0$ för alla $t$.

*Lycka till!*

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.