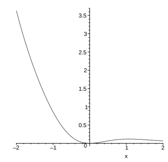
KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II, 18 augusti 2009

1. Vi söker $y(x)$ som uppfyller $y' + (2x+1)\,y = x\,e^{-x}$ och $y(0) = 0$. Ekvationen är linjär av första ordningen. Integrerande faktor: $e^{\int(2x+1)\,dx} = e^{x^2+x}$. Då ekvationen multipliceras med den fås $(e^{x^2+x}y)' = e^{x^2+x}\,x\,e^{-x} = x\,e^{x^2} = (\frac{1}{2}e^{x^2})'$, så $e^{x^2+x}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, C en konstant, och alltså $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + C\,e^{-x^2-x}$. $y(0) = 0$ ger $\frac{1}{2} + C = 0$, så $C = -\frac{1}{2}$ och **Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x^2-x}}$.**



---

2. Vi söker $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\tau}\operatorname{sinc}(3\tau)\operatorname{sinc}(4(t-\tau))\,d\tau$ som funktion av t.

Lösning: $h(t)$ är faltningen av $e^{i2\pi t}\operatorname{sinc}3t$ och $\operatorname{sinc}4t$. Eftersom $\operatorname{sinc}t$ har fouriertransformen $\operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi}$ har $\operatorname{sinc}3t$ transform $\frac{1}{3}\operatorname{rect}\frac{\omega}{6\pi}$ och $e^{i2\pi t}\operatorname{sinc}3t$ har $\frac{1}{3}\operatorname{rect}\frac{\omega-2\pi}{6\pi}$ ($\frac{1}{3}$ mellan $-\pi$ och 5π, 0 f.ö.). $\operatorname{sinc}4t$ har transform $\frac{1}{4}\operatorname{rect}\frac{\omega}{8\pi}$ ($\frac{1}{4}$ mellan -4π och 4π, 0 f.ö.). $H(\omega)$ är produkten av de senare, dvs den är $\frac{1}{12}$ mellan $-\pi$ och 4π, 0 f.ö., så $H(\omega) = \frac{1}{12}\operatorname{rect}\frac{\omega-\frac{3\pi}{2}}{5\pi}$ och som ovan baklänges fås svaret. **Svar: Den sökta $\boldsymbol{h(t) = \frac{5}{24}e^{i\frac{3\pi}{2}t}\operatorname{sinc}\frac{5t}{2}}$.**

(Räkningarna blir lite enklare (färre π) med f i stället för ω, men de uttrycken finns inte i formelsamlingen.)

---

3. Vi har $x(t) = e^{-|t|}$ för $|t| \le 1$ och $= 0$ för $|t| > 1$ och skall bestämma de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$ och med hjälp av $x(t) - x''(t)$ också fouriertransformen $X(\omega)$.

Lösning: Eftersom $x(t)$ är deriverbar utom i de isolerade punkterna $0, \pm 1$ där den har språng $0, \mp\frac{1}{e}$, fås $x'(t) = \{x'(t)\} + \frac{1}{e}\delta(t+1) - \frac{1}{e}\delta(t-1) = \frac{1}{e}\delta(t+1) - \frac{1}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -e^{-|t|}\operatorname{sgn}t, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ och p.s.s. $x''(t) = \frac{1}{e}\delta'(t+1) - \frac{1}{e}\delta'(t-1) - 2\delta(t) + \frac{1}{e}\delta(t+1) + \frac{1}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} e^{-|t|}, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$.

Det ger $x(t) - x''(t) = 2\delta(t) - \frac{1}{e}\delta'(t+1) + \frac{1}{e}\delta'(t-1) - \frac{1}{e}\delta(t+1) - \frac{1}{e}\delta(t-1)$. Fouriertransform av båda leden: $X(\omega) + \omega^2 X(\omega) = 2 - \frac{i\omega}{e}e^{i\omega} + \frac{i\omega}{e}e^{-i\omega} - \frac{1}{e}e^{i\omega} - \frac{1}{e}e^{-i\omega} = 2 + \frac{2\omega}{e}\sin\omega - \frac{2}{e}\cos\omega$.

Svar: Derivatorna $\boldsymbol{x'(t) = \frac{1}{e}\delta(t+1) - \frac{1}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -e^{-|t|}\operatorname{sgn}t, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}}$,

$\boldsymbol{x''(t) = \frac{1}{e}\delta'(t+1) - \frac{1}{e}\delta'(t-1) - 2\delta(t) + \frac{1}{e}\delta(t+1) + \frac{1}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} e^{-|t|}, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}}$.

Fouriertransformen $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2}{e}\frac{\omega\sin\omega - \cos\omega}{1+\omega^2}}$.

(Alternativ: Skriv $x(t) = e^{-|t|}\operatorname{rect}\frac{t}{2}$ och använd $|t|' = \operatorname{sgn}t$, $(\operatorname{rect}t)' = \delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})$ och deriveringsregler.)

---

4. Ett LTI-system har utsignal $y(t) = \frac{4}{3}e^{-|t|} - \frac{2}{3}e^{-2|t|}$ för insignalen $x(t) = e^{-2|t|}$. Vi söker utsignalen $y_1(t)$ för insignal $x_1(t) = e^{-3|t|}$.

Lösning: Om systemets överföringsfunktion är $H(\omega)$ gäller $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$, dvs $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$. Det ger att $Y_1(\omega) = H(\omega)\cdot X_1(\omega) = \frac{Y(\omega)\cdot X_1(\omega)}{X(\omega)}$.

I vårt fall är (från tabell) $X(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$, $Y(\omega) = \frac{8}{3}\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{8}{3}\frac{1}{4+\omega^2} = \frac{8}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$ och $X_1(\omega) = \frac{6}{9+\omega^2}$, så $Y_1(\omega) = \frac{8\cdot 6\cdot(4+\omega^2)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)\cdot(9+\omega^2)\cdot 4} = \frac{12}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)} = \frac{3}{2}\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{9+\omega^2}$. Inverstransformation ger svaret.

Svar: Utsignalen blir $\boldsymbol{y_1(t) = \frac{3}{4}e^{-|t|} - \frac{1}{4}e^{-3|t|}}$.

---

5. Vi söker alla lösningar $x(t)$, $y(t)$ till problemet $\begin{cases} x' = 2x - 5y + 2e^t \\ y' = x - 2y \\ x(0) = 4,\ y(0) = 3. \end{cases}$

Lösning: Ekvationerna kan skrivas $\binom{x}{y}' = \mathbf{A}\binom{x}{y} + \binom{2e^t}{0}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristisk ekvation: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, så $\lambda_{1,2} = \pm i$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = i$: $\left(\begin{matrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \binom{2+i}{1}$.
Allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges då av $\binom{x}{y} = c_1 \mathrm{Re}\left(\mathbf{k}_1 e^{it}\right) + c_2 \mathrm{Im}\left(\mathbf{k}_1 e^{it}\right)$,
dvs $\binom{x}{y}_h = c_1 \binom{2\cos t - \sin t}{\cos t} + c_2 \binom{2\sin t + \cos t}{\sin t}$ ($c_{1,2}$ godtyckliga konstanter).
Ansatsen $\binom{x}{y}_p = \mathbf{a}e^t$ för en partikulärlösning ger $\mathbf{a}e^t = \mathbf{A}\mathbf{a}e^t + \binom{2}{0}e^t$, med lösning $\mathbf{a} = \binom{3}{1}$.
Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är $\binom{x}{y} = \binom{x}{y}_h + \binom{x}{y}_p$.
Begynnelsevillkoret bestämmer konstanterna c_1, c_2: $c_1\binom{2}{1} + c_2\binom{1}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{3}$, med lösning $c_1 = 2$, $c_2 = -3$.
Svar: Enda lösningen är $\boldsymbol{x(t) = \cos t - 8\sin t + 3e^t,\ y(t) = 2\cos t - 3\sin t + e^t}$.

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen ger (med villkoren) $s\mathbf{X} - \binom{4}{3} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \binom{2}{0}\frac{1}{s-1}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\binom{x}{y}\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x\} \\ \mathcal{L}\{y\} \end{pmatrix}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1}\left[\binom{4}{3} + \binom{2}{0}\frac{1}{s-1}\right]$.
Uträkning och återtransformering ger samma svar som ovan.

---

6. I en kvadratisk platta, sidolängd π, är temperaturen $u(x,y)$. Den uppfyller ekvationen $u''_{xx} + u''_{yy} = ku$, k konstant. Randvillkoren är $u(0,y) = u(x,0) = u(\pi,y) = 0$ och $u(x,\pi) = \sin 2x - \sin 3x$, då $0 < x, y < \pi$. Vi söker $u(x,y)$.
Variabelseparation: Lösning av formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger $\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + k = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = Y(0) = 0. \end{cases}$
$X'' = -\lambda X$, $X(0) = X(\pi) = 0$ har lösningar (andra än 0) precis då $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. De motsvarande lösningarna är $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n \sin nx \sinh(\sqrt{n^2+k}\,y)$.
Superposition ger vår allmänna lösning $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh(\sqrt{n^2+k}\,y)$.
Koefficienterna c_n bestäms av det inhomogena randvillkoret $u(x,\pi) = \sin 2x - \sin 3x$, $0 < x < \pi$, dvs $c_2 \sinh(\sqrt{4+k}\,\pi) = 1$, $c_3 \sinh(\sqrt{9+k}\,\pi) = -1$ och övriga $c_n = 0$. Insättning ger
Svar: $\boldsymbol{u(x,y) = \sin 2x \frac{\sinh(\sqrt{4+k}\,y)}{\sinh(\sqrt{4+k}\,\pi)} - \sin 3x \frac{\sinh(\sqrt{9+k}\,y)}{\sinh(\sqrt{9+k}\,\pi)}}$.

---

7. Vi söker alla $y(t)$, $t \geq 0$, (styckvis kontinuerliga och av exponentiell typ) som uppfyller $\int_0^t (e^{-\tau} + e^{-3\tau}) y(t-\tau)\,d\tau = te^{-t}$ då $t \geq 0$.
Lösning: Laplacetransformation ger (med villkoret på $y(t)$ och att en faltnings transform är produkten av transformerna) $(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3})Y = \frac{1}{(s+1)^2}$, dvs $\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}Y = \frac{1}{(s+1)^2}$, så $Y(s) = \frac{s+3}{2(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)}$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger svaret.
Svar: Den enda lösningen är $\boldsymbol{y(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}}$.

---

8. Funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ uppfyller $x(nT) = y(nT)$ för alla heltal n.
Det finns också två tal α, β så att $x(t)$:s och $y(t)$:s fouriertransformer uppfyller att $X(\omega) = 0$ om inte $\alpha < \omega < \alpha + \frac{2\pi}{T}$ och $Y(\omega) = 0$ om inte $\beta < \omega < \beta + \frac{2\pi}{T}$.
Vi skall visa att det finns $x_1(t)$, $x_2(t)$ och ett heltal k så att $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ och $y(t) = e^{ik\frac{2\pi}{T}t}x_1(t) + e^{i(k+1)\frac{2\pi}{T}t}x_2(t)$ för alla t.
Lösning: Eftersom $x(t)$ och $y(t)$ har samma samplingsvärden är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = y(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$. Fouriertransformation ger
$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\frac{2\pi}{T})$.
Begränsningen i bandbredd för x och y ger att för varje ω är högst en term i de sista summorna skild från 0. Speciellt gäller för varje ω att $Y(\omega) = X(\omega - n\frac{2\pi}{T})$ för något n, där det för ω med $Y(\omega) \neq 0$ bara förekommer högst två värden för n, k och $k+1$, säg (ty intervallet $[\beta, \beta + \frac{2\pi}{T}]$ skär högst två av intervallen $[\alpha + n\frac{2\pi}{T}, \alpha + (n+1)\frac{2\pi}{T}]$).
Låt $X_1(\omega)$ vara $Y(\omega + k\frac{2\pi}{T})$) i $[\beta - k\frac{2\pi}{T}, \alpha + \frac{2\pi}{T}]$ och 0 annars och p.s.s. $X_2(\omega)$ vara $Y(\omega + (k+1)\frac{2\pi}{T})$) i $[\alpha, \beta - k\frac{2\pi}{T}]$ och 0 annars. Då blir, för alla ω, $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$ och $Y(\omega) = X_1(\omega - k\frac{2\pi}{T}) + X_2(\omega - (k+1)\frac{2\pi}{T})$, så $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ och $y(t) = e^{ik\frac{2\pi}{T}t}x_1(t) + e^{i(k+1)\frac{2\pi}{T}t}x_2(t)$ för alla t. **Saken är klar.**
