KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 18 augusti 2009 för T
SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook BETA, Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	26	23	20	17	14	11	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1207.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

Den som vt09 blivit godkänd på ks 1, ks 2 eller bonusuppgiften har automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift 1, 2 respektive 3.

1. (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks1.)*
Finn den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' + (2x+1)\,y = x\,e^{-x}$$

som uppfyller $y(0) = 0$.

2. (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks2.)*
Bestäm funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\tau}\,\mathrm{sinc}(3\tau)\,\mathrm{sinc}(4(t-\tau))\,d\tau.$$

$\mathrm{sinc}(t)$ är (som vanligt) $= \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ då $t \neq 0$ och $= 1$ då $t = 0$.

3. (3p) *(Bara för dem som inte klarat bonusuppgiften (lila lappen).)*
Låt

$$x(t) = \begin{cases} e^{-|t|}, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$ och använd $x(t) - x''(t)$ för att bestämma fouriertransformen $X(\omega)$.

4. (3p) Ett LTI-system ger då insignalen är $x(t) = e^{-2|t|}$ ifrån sig utsignalen $y(t) = \frac{4}{3}e^{-|t|} - \frac{2}{3}e^{-2|t|}$.
Vad blir utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är $x_1(t) = e^{-3|t|}$?

5. (5p) Finn alla lösningar $x(t),\ y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 2e^t \\ y' = x - 2y \\ x(0) = 4,\ y(0) = 3. \end{cases}$$

6. (5p) En tunn kvadratisk platta med sidolängd π har den stationära temperaturen $u(x, y)$. Tre av sidorna har temperaturen 0. Bestäm temperaturen i plattan, om koordinatsystemet och den fjärde sidans temperatur är sådana att $u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0,\ u(x, \pi) = \sin 2x - \sin 3x$, då $0 < x, y < \pi$. Plattan utbyter värme med den omgivande luften (temperatur 0) enligt Newtons lag, så då $0 < x, y < \pi$ gäller $u''_{xx} + u''_{yy} = ku,\ k$ en positiv konstant.

7. (5p) Finn alla $y(t),\ t \geq 0$, (styckvis kontinuerliga och av exponentiell typ) som för $t \geq 0$ uppfyller

$$\int_0^t (e^{-\tau} + e^{-3\tau})y(t - \tau)\, d\tau = te^{-t}.$$

8. (5p) Funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ har samma samplingsvärden för sampelavståndet T, dvs $x(nT) = y(nT)$ för alla heltal n.
Vidare finns två tal α, β så att $x(t)$:s och $y(t)$:s fouriertransformer uppfyller att $X(\omega) = 0$ om inte $\alpha < \omega < \alpha + \frac{2\pi}{T}$ och $Y(\omega) = 0$ om inte $\beta < \omega < \beta + \frac{2\pi}{T}$.
Visa att det finns funktioner $x_1(t)$, $x_2(t)$ och ett heltal k så att för alla t

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = e^{ik\frac{2\pi}{T}t}x_1(t) + e^{i(k+1)\frac{2\pi}{T}t}x_2(t). \end{cases}$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.