KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II, 26 april 2010

1. Vi söker alla $x(t)$, $y(t)$ så att $x' + 3x = 2y$, $y' + y = -x$ och $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Lösning: Ekvationerna kan skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristisk ekvation: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5$, så $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$.
Motsvarande egenvektorer är lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = -2 + i$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1-i & 2 & 0 \\ -1 & 1-i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$.
Två linjärt oberoende reella lösningar ges av Re, Im av $k_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}(\cos t + i \sin t)$, så allmänna lösningen till ekvationerna ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t}$.
$x(0) = 1$, $y(0) = 2$ ger $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, vilket ger
Svar: Enda lösning är $\boldsymbol{x(t) = e^{-2t}(\cos t + 3\sin t)}$, $\boldsymbol{y(t) = e^{-2t}(2\cos t + \sin t)}$.

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen blir (med begynnelsevillkoren) $s\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{AX}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x\} \\ \mathcal{L}\{y\} \end{pmatrix}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+4s+5}\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}$, så $\mathbf{X} = \frac{1}{(s+2)^2+1}\begin{pmatrix} (s+2)+3 \\ 2(s+2)+1 \end{pmatrix}$.
Återtransformering ger samma svar som ovan.

---

2. $f(t)$ har fouriertransformen $F(\omega) = e^{-e^{\omega^2}}$. Vi söker transformen för $g(t) = t^2 e^{t^2} e^{-e^{t^2}}$.

Lösning: $f(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} e^{-e^{\omega^2}}$, så (dualitet) $e^{-e^{t^2}} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2\pi f(-\omega)$, så $g(t) = -\frac{1}{2} t \frac{d}{dt} e^{-e^{t^2}} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} -\frac{1}{2} i \frac{d}{d\omega}(i\omega 2\pi f(-\omega)) = \pi(f(-\omega) - \omega f'(-\omega))$, så
Svar: Den sökta $\boldsymbol{G(\omega) = \pi(f(-\omega) - \omega f'(-\omega))}$.

---

3. $f(x)$ är 2π-periodisk och $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ då $|x| \le \frac{\pi}{2}$ och 0 då $\frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi$. Den har den komplexa fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.
Vi söker (a) de generaliserade derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$, (b) koefficienterna c_n och (c) koefficienterna a_n och b_n i f:s reella fourierserie $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Lösning: Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, är $f'(x) = \{f'(x)\} = -\operatorname{sgn} x$ då $|x| < \frac{\pi}{2}$ och $= 0$ då $\frac{\pi}{2} < |x| < \pi$, styckvis konstant.
Då är $f''(x) = 0 + \delta(x + \frac{\pi}{2}) - 2\delta(x) + \delta(x - \frac{\pi}{2})$, båda 2π-periodiska.
Fourierserien för $f''(x)$ är $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2)c_n e^{inx}$, så $-n^2 c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}(e^{in\frac{\pi}{2}} - 2 + e^{-in\frac{\pi}{2}})$ och för $n \neq 0$ fås $c_n = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})$.
Direkt fås $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \cdots = \frac{\pi}{8}$.
Eftersom $c_{-n} = c_n$ gäller för den reella seriens koefficienter att $a_n = c_n + c_{-n}$ och $b_n = 0$, alla $n = 0, 1, 2, \ldots$, så

Svar a: $\boldsymbol{f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x & \text{då } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}}$, **$2\pi$-periodisk,**
$\boldsymbol{f''(x) = \delta(x + \frac{\pi}{2}) - 2\delta(x) + \delta(x - \frac{\pi}{2})}$, **$2\pi$-periodisk.**
b: De sökta koefficienterna är $\boldsymbol{c_0 = \frac{\pi}{8}}$, $\boldsymbol{c_n = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})}$, $\boldsymbol{n \neq 0}$.
c: De sökta koefficienterna ges nu av
$\boldsymbol{a_0 = \frac{\pi}{4}}$, $\boldsymbol{a_n = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})}$, $\boldsymbol{b_n = 0}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$

---

4. Ett LTI-system har pulssvarsfunktionen $h(t) = e^{-t}$ då $0 < t < 1$ och $= 0$ f.ö. Vi söker (a) utsignalen om insignalen är $x(t) = \mathcal{U}(t)\cos t$ och (b) utsignalen då insignalen är $h(t)$.

Lösning: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)\,d\tau$, dvs då $h(t)$ och $x(t)$ är 0 för $t < 0$ fås $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$, en laplacefaltning. Vi använder laplacetransform och får $h(t) = e^{-t}(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)) = e^{-t}\mathcal{U}(t) - e^{-1}e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$, så $H(s) = \frac{1}{s+1}(1 - e^{-1}e^{-s})$.
I a. är $x(t) = \mathcal{U}(t)\cos t$, så $X(s) = \frac{s}{s^2+1}$ och $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}(1 - e^{-1}e^{-s}) = (\frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}{s^2+1})(1 - e^{-1}e^{-s})$, så **Svar a: Utsignalen $\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + \cos t + \sin t)\mathcal{U}(t) - \frac{1}{2e}(-e^{-(t-1)} + \cos(t-1) + \sin(t-1))\mathcal{U}(t-1)}$.**
I b. är $Y(s) = H(s)^2 = \frac{1}{(s+1)^2}(1 - 2e^{-1}e^{-s} + e^{-2}e^{-2s})$ som ger
Svar b: Utsignalen $\boldsymbol{y(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t) - 2(t-1)e^{-t}\mathcal{U}(t-1) + (t-2)e^{-t}\mathcal{U}(t-2)}$.

---

5. Vi söker $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$, då $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t-\tau)\frac{1}{\tau^2+1}\,d\tau$.

Lösning: Enligt Parseval (fs) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$.
$f(t)$ är faltningen av $\operatorname{sinc}(t)$ och $\frac{1}{t^2+1}$, så dess fouriertransform är produkten av deras transformer, $F(\omega) = \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\cdot\pi e^{-|\omega|}$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 e^{-2|\omega|}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\,2\int_0^{\pi} e^{-2\omega}\,d\omega = \pi\left[\frac{e^{-2\omega}}{-2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2\pi})$.

Svar: Integralens värde är $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\pi})}$.

---

6. Temperaturen $u(x,y)$ i en kvadratisk platta uppfyller ekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k\,u$, för $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, där $k > 0$ är en konstant.
Vi söker $u(x,y)$ för $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, då (a) $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $0 \le y \le \pi$ och $u(x,0) = 0$, $u(x,\pi) = \sin(x) + \sin(3x)$, $0 \le x \le \pi$ och (b) $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $0 \le y \le \pi$ och $u(x,0) = \sin(2x)$, $u(x,\pi) = \sin(3x)$, $0 \le x \le \pi$.

Lösning: Variabelseparation. $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ insatt i ekvationen ger $\frac{X''}{X} = k - \frac{Y''}{Y} = \lambda$, konstant. För $X(x)$ fås $X'' = \lambda X$, $X(0) = X(\pi) = 0$, med enda icketriviala lösningarna (multipler av) $X_n(x) = \sin(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (som svarar mot $\lambda = -n^2$). Motsvarande $Y(y)$ som uppfyller $Y(0) = 0$ blir (multipler av) $Y_n(y) = \sinh(\sqrt{k+n^2}y)$ och en allmän lösning (med $u = 0$ på tre sidor) $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)\sinh(\sqrt{k+n^2}y)$.
b_n bestäms i a. av att $u(x,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)\sinh(\sqrt{k+n^2}\pi) = \sin(x) + \sin(3x)$, så $b_1 = \frac{1}{\sinh(\sqrt{k+1^2}\pi)}$, $b_3 = \frac{1}{\sinh(\sqrt{k+3^2}\pi)}$ och övriga $b_n = 0$.
I uppgift b. delas lösningen upp i en del som liksom den i a. är 0 på kanterna, utom på kanten med $y = \pi$, och en del som bara är $\neq 0$ på kanten med $y = 0$. På samma sätt som i a. fås den andra delen till $\sin(2x)\frac{\sinh(\sqrt{k+2^2}(\pi-y))}{\sinh(\sqrt{k+2^2}\pi)}$

Svar a: $\boldsymbol{u(x,y) = \sin(x)\frac{\sinh(\sqrt{k+1}y)}{\sinh(\sqrt{k+1}\pi)} + \sin(3x)\frac{\sinh(\sqrt{k+9}y)}{\sinh(\sqrt{k+9}\pi)}}$,
b: $\boldsymbol{u(x,y) = \sin(3x)\frac{\sinh(\sqrt{k+9}y)}{\sinh(\sqrt{k+9}\pi)} + \sin(2x)\frac{\sinh(\sqrt{k+4}(\pi-y))}{\sinh(\sqrt{k+4}\pi)}}$.

---

7. Vi söker alla $y(t)$, $t \ge 0$, (med $y(t)$, $y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig) så att $y''(t) = y'(t) + 6e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,y(\tau)\,d\tau$ för alla $t \ge 0$ och $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Lösning: $y''(t) = y'(t) + 6e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,y(\tau)\,d\tau = y'(t) + 6\int_0^t e^{-(t-\tau)}\,y(\tau)\,d\tau$. Laplacetransformation ger (p.g.a. villkoret på $y(t)$ och att transformen av faltningen är produkten av transformerna) $s^2Y - sy(0) - y'(0) = (s^2Y - s + 1 =)sY - y(0) + 6\frac{1}{s+1}Y = sY - 1 + 6\frac{1}{s+1}Y$, så $(s^2 - s - \frac{6}{s+1})Y = (\frac{s^3-s-6}{s+1}Y =)s - 2$ och $Y(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s^3-s-6} = \frac{s+1}{s^2+2s+3} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2}$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger svaret.

Svar: $\boldsymbol{y(t) = e^{-t}\cos(\sqrt{2}\,t)}$.

---

8. Vid sampling av $x(t)$ med intervall T saknas värdena $x(3nT)$ (n heltal). Vi söker (a) fouriertransformen $X_{rs}(\omega)$ av $x_{rs}(t) = \sum_{n=\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\ldots} x(nT)\delta(t-nT)$ (uttryckt i transformen $X(\omega)$ för $x(t)$) och skall (b) visa att då $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \ge \frac{2\pi}{3T}$ räcker $x_{rs}(t)$ för att bestämma $x(t)$.

Lösning: $x_{rs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(3nT)\delta(t-3nT) = x(t)\cdot(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n3T))$ och (transformen av en produkt) $X_{rs}(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega)*(\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{3T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\frac{2\pi}{3T})) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\frac{2\pi}{T}) - \frac{1}{3T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\frac{2\pi}{3T})$.

Svar a: $\boldsymbol{X_{rs}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\frac{2\pi}{T}) - \frac{1}{3T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\frac{2\pi}{3T})}$.

Kalla de två termerna i $X_{rs}(\omega)$ för $f_1(\omega)$ och $-f_3(\omega)$. Då är $f_1(\omega)$ $\frac{2\pi}{T}$-periodisk medan $f_3(\omega)$ är $\frac{2\pi}{3T}$-periodisk. Om $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \ge \frac{2\pi}{3T}$ är $f_1(\omega) = 0$ för $\frac{2\pi}{3T} \le \omega \le \frac{4\pi}{3T}$, en hel period för $f_3(\omega)$. Värdena för $X_{rs}(\omega)$ i det intervallet bestämmer alltså $f_3(\omega)$ helt och vi kan dra bort den andra termen från $X_{rs}(\omega)$ och få fram $f_1(\omega)$. För $|\omega| < \frac{2\pi}{3T}$ är $X(\omega) = f_1(\omega)$, så vi får entydigt $X(\omega)$ och därmed $x(t)$. **Saken är klar.**
