KTH Matematik

Tentamen måndagen den 26 april 2010 för T
SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II

Skrivtid: 13.00–18.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook BETA, Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	26	23	20	17	14	11	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1207.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

Den som vt10 blivit godkänd på ks 1, ks 2 eller bonusuppgiften har automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift 1, 2 respektive 3.

1. (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks1.)*
Finn alla lösningar $x(t)$, $y(t)$ till problemet
$$\begin{cases} x' + 3x = 2y \\ y' + y = -x \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2. \end{cases}$$

2. (3p) *(Bara för dem som inte klarat ks2.)*
Låt $f(t)$ vara en funktion som har fouriertransformen $F(\omega) = e^{-e^{\omega^2}}$.
Finn fouriertransformen för $g(t) = t^2\, e^{t^2}\, e^{-e^{t^2}}$.
Svaret får innehålla funktionen f och dess derivator, men inga integraler eller faltningar.

3. *(Bara för dem som inte klarat bonusuppgiften (röda lappen).)*
Låt den 2π-periodiska funktionen $f(x)$, som ges av att
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x|, & \text{då } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{då } \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}.$$
ha den komplexa fourierserien
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$
a. (1p) Bestäm de generaliserade derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$.
b. (1p) Bestäm alla koefficienterna c_n.
c. (1p) Bestäm alla koefficienterna a_n och b_n i f:s reella fourierserie
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

V.g. vänd!

4. Ett LTI-system har pulssvarsfunktionen $h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$

a. (2p) Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen är $x(t) = \mathcal{U}(t)\,\cos t$?
b. (2p) Vad blir utsignalen om systemets egen pulssvarsfunktion används som insignal, dvs vad är pulssvarsfunktionen för seriekopplingen av två sådana system?
$\mathcal{U}(t)$ betecknar Heavisides stegfunktion.

5. (4p) Bestäm

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt,$$

där $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t-\tau)\frac{1}{\tau^2+1}\, d\tau$ och som vanligt $\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$
Du behöver inte bestämma funktionen $f(t)$.

6. Temperaturen $u(x, y)$ i en kvadratisk platta uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k\, u, \text{ för } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,$$

där $k > 0$ är en konstant.
a. (3p) Bestäm $u(x, y)$ för $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, då u på plattans rand ges av $u(0, y) = u(\pi, y) = 0, 0 \leq y \leq \pi$ och $u(x, 0) = 0$, $u(x, \pi) = \sin(x)+\sin(3x), 0 \leq x \leq \pi$.
b. (2p) Bestäm $u(x, y)$ för $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, då u på plattans rand ges av $u(0, y) = u(\pi, y) = 0,\ 0 \leq y \leq \pi$ och $u(x, 0) = \sin(2x)$, $u(x, \pi) = \sin(3x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

7. (5p) Finn alla $y(t),\ t \geq 0$, (med $y(t)$, $y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig) som uppfyller

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t) + 6e^{-t} \int_0^t e^{\tau}\, y(\tau)\, d\tau, \text{ för alla } t \geq 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

8. Man vill bestämma funktionen $x(t)$ med hjälp av sampling och har uppmätt $\{x(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, men tyvärr har alla värden $\{x(3nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ gått förlorade.
a. (3p) Finn fouriertransformen $X_{rs}(\omega)$ (uttryckt i transformen $X(\omega)$ för $x(t)$) av

$$x_{rs}(t) = \sum_{n=\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\ldots} x(nT)\delta(t - nT).$$

b. (2p) Man vet att $X(\omega) = 0$ om $|\omega| \geq \frac{2\pi}{3T}$. Förklara varför kännedom om $x_{rs}(t)$ räcker för att bestämma $x(t)$.

Lycka till!
Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.