KTH Matematik

**Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II,
17 augusti 2010**

1. Funktionen $y(x)$ uppfyller $y' = \frac{x}{1+y^2}\, e^{x+y}$ och $y(0) = 0$.
Vi söker ett samband som implicit bestämmer $y(x)$.

Lösning: Ekvationen är separabel och kan skrivas $(1+y^2)e^{-y}y' = xe^x$. $\int \ldots dx$ av båda leden (partiellt) ger $(-3-2y-y^2)e^{-y} = (x-1)e^x + C$, C konstant. $y(0) = 0$ ger $C = -2$.
Svar: ett sådant samband är $\boldsymbol{(y^2+2y+3)e^{-y} = (1-x)e^x + 2}$.

---

2. $f(t)$ har fouriertransformen $F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2+e^{|\omega|}}$.
Vi söker fouriertransformen $G(\omega)$ för $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|t-\tau|}}{1+4(\tau-1)^2+e^{2|\tau-1|}}\, d\tau$.

Lösning: $g(t)$ är faltningen av $e^{-|t|}$ och $F(2(t-1))$, så $G(\omega)$ är produkten av deras transformer. $e^{-|t|} \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{2}{1+\omega^2}$ (fs). $F(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} 2\pi f(-\omega)$ (dualitet), så $F(2t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \pi f(-\frac{\omega}{2})$ och $F(2(t-1)) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{-i\omega}\pi f(-\frac{\omega}{2})$.
Svar: Den sökta transformen är $\boldsymbol{G(\omega) = \frac{2\pi}{1+\omega^2} e^{-i\omega} f(-\frac{\omega}{2})}$.

---

3. $x(t) = e^{2t}\cos t$ då $|t| \le \frac{\pi}{2}$ och 0 annars.
Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$, (b.) den generaliserade funktionen $y(t) = x''(t) - 4x'(t) + 5x(t)$ och (c.) $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$ (med hjälp av $y(t)$).

Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig ($\cos t = 0$ för $t = \pm\frac{\pi}{2}$) så den generaliserade derivatan $x'(t) = \{x'(t)\}$, den klassiska derivatan, $\boldsymbol{x'(t) = e^{2t}(2\cos t - \sin t)}$ då $\boldsymbol{|t| < \frac{\pi}{2}}$ och **0** annars.
$x'(t)$ är deriverbar utom i punkterna $\pm\frac{\pi}{2}$, där den har sprången $e^{\pm\pi}$, så

$$\boldsymbol{x''(t) = e^{\pi}\delta(t-\tfrac{\pi}{2}) + e^{-\pi}\delta(t+\tfrac{\pi}{2}) + \begin{cases} e^{2t}(3\cos t - 4\sin t), & |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}}$$

Insättning ger $\boldsymbol{y(t)(= x''(t) - 4x'(t) + 5x(t)) = e^{\pi}\delta(t-\frac{\pi}{2}) + e^{-\pi}\delta(t+\frac{\pi}{2})}$.
Fouriertransformation av detta ger $-\omega^2 X(\omega) - 4i\omega X(\omega) + 5X(\omega) = e^{\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}\omega} + e^{-\pi}e^{i\frac{\pi}{2}\omega}$, så $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{e^{\pi(1-i\frac{\omega}{2})} + e^{-\pi(1-i\frac{\omega}{2})}}{-\omega^2-4i\omega+5}}$ (ty eftersom $x(t)$ är absolutintegrabel, är $X(\omega)$ en vanlig funktion).
Svar: $\boldsymbol{x'(t)}$, $\boldsymbol{x''(t)}$, $\boldsymbol{y(t)}$ och $\boldsymbol{X(\omega)}$ enligt ovan.

---

4. Finn alla lösningar $x(t)$, $y(t)$ till problemet $x' = 4x - 5y$, $y' = x + 2y$, $x(0) = 4$, $y(0) = 2$.

Lösning: Ekvationerna kan skrivas $\binom{x}{y}' = \mathbf{A}\binom{x}{y}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristisk ekvation: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13$, så $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.
Motsvarande egenvektorer är lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 3+2i$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & -5 & 0 \\ 1 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2i & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \binom{1+2i}{1}$.
Två linjärt oberoende reella lösningar ges av Re, Im av $k_1 e^{\lambda_1 t} = \binom{1+2i}{1} e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t)$,
så allmänna lösningen till ekvationerna ges av $\binom{x}{y} = c_1 \binom{\cos 2t - 2\sin 2t}{\cos 2t} e^{3t} + c_2 \binom{2\cos 2t + \sin 2t}{\sin 2t} e^{3t}$.
$x(0) = 4$, $y(0) = 2$ ger $c_1\binom{1}{1} + c_2\binom{2}{0} = \binom{4}{2}$, så $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, vilket ger
Svar: Enda lösning är $\boldsymbol{x(t) = e^{3t}(4\cos 2t - 3\sin 2t)}$, $\boldsymbol{y(t) = e^{3t}(2\cos 2t + \sin 2t)}$.

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen blir (med begynnelsevillkoren) $s\mathbf{X} - \binom{4}{2} = \mathbf{AX}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\binom{x}{y}\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x\} \\ \mathcal{L}\{y\} \end{pmatrix}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1}\binom{4}{2}$.
$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-4 & 5 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2-6s+13}\begin{pmatrix} s-2 & -5 \\ 1 & s-4 \end{pmatrix}$, som ger $\mathbf{X} = \frac{1}{(s-3)^2+2^2}\begin{pmatrix} 4(s-3)-6 \\ 2(s-3)+2 \end{pmatrix}$.
Återtransformering ger samma svar som ovan.

---

5. Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) har pulssvaret $h(t) = e^{i\pi t}\,\mathrm{sinc}(3(t-4))$. Vi söker utsignalen $y(t)$ då insignalen är $x(t) = \mathrm{sinc}(3t)$.

Lösning: Systemet är LTI, så $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau}\,\mathrm{sinc}(3(\tau-4))\,\mathrm{sinc}(3(t-\tau))\,d\tau$. Det ger för fouriertransformerna att $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.
Enligt formelsamling: $\mathrm{sinc}(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \mathrm{rect}\,\frac{\omega}{2\pi}$, så $\mathrm{sinc}(3t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$, $\mathrm{sinc}(3(t-4)) \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{1}{3}e^{-i\omega 4}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$ och $h(t) = e^{i\pi t}\,\mathrm{sinc}(3(t-4)) \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{1}{3}e^{-i(\omega-\pi)4}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = H(\omega)$, medan $X(\omega) = \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$.
$\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = 1$ då $-2\pi < \omega < 4\pi$, $= 0$ f.ö. och $\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi} = 1$ då $-3\pi < \omega < 3\pi$, $= 0$ f.ö., så $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi} = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi}$.
Formelsamling igen: $\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{2}{5}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{5\pi}$, $\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4)) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{-i4\omega}\frac{2}{5}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{5\pi}$,
$\frac{5}{18}e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4)) \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{5}{18}\frac{2}{5}e^{-i4(\omega-\frac{\pi}{2})}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi} = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi} = Y(\omega)$, så
Svar: Utsignalen $\boldsymbol{y(t) = \frac{5}{18}e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4))}$.

---

6. Vi söker (a.) b_n i fouriersinusserien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ för funktionen $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ då $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ och $= \frac{\pi}{2}$ då $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ och (b.) lösningen $u(x,t)$, $0 < x < \pi$, $t > \infty$ till $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$ för $0 < x < \pi$, $t > 0$ ($k > 0$ konstant).

Lösning: Fouriersinusserien för $f(x)$ är fourierserien för $g(x)$, den udda, 2π-periodiska fortsättningen av $f(x)$. $g(x) = f(x)$ för $0 < x < \pi$, $= -f(-x)$ för $-\pi < x < 0$ och 2π-periodisk. Det ger den generaliserade derivatan $g'(x) = \{g'(x)\} + \frac{\pi}{2}\delta(x+\frac{\pi}{2}) + \pi\delta(x) + \frac{\pi}{2}\delta(x-\frac{\pi}{2}) - \pi\delta(x-\pi) + \ldots$ (2π-periodisk), där $\{g'(x)\} = -1$ för $|x| < \frac{\pi}{2}$, $= 0$ för $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ och 2π-periodisk. Dess fourierserie är $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx)$, så $nb_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g'(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\cos(nx)\,dx + \frac{\pi}{2}\cos(-n\frac{\pi}{2}) + \pi\cos 0 + \frac{\pi}{2}\cos(n\frac{\pi}{2}) - \pi\cos(n\pi)) = -\frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\frac{\pi}{2}) + (1-(-1)^n)$ (då $n \ne 0$, $= 0$ då $n = 0$). [Alt. $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$, ger samma b_n.]
Variabelseparation med randvillkoren ger lösningar $e^{-kn^2t}\sin(nx)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, så med superposition och begynnelsevillkoret fås lösningen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t}\sin(nx)$.
Svar a: $\boldsymbol{b_n = -\frac{2}{\pi n^2}\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{\cos(n\frac{\pi}{2}) + (1-(-1)^n)}{n}}$, b: $\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t}\sin(nx)}$.

---

7. Vi söker alla $y(t)$, $t \ge 0$, (med, utom för $t = 1$, $y(t)$ kontinuerlig av exponentiell typ, $y'(t)$ styckvis kontinuerlig) som uppfyller $y'(t) = \delta(t-1) + \int_0^t y(\tau)(\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau))\,d\tau$ för alla $t > 0$, $y(0) = 0$.

Lösning: Laplacetransformation ger (p.g.a. villkoret på $y(t)$ och att transformen av faltningen är produkten av transformerna) $sY - y(0) = e^{-s} + Y\cdot\frac{s+1}{s^2+1}$, vilket ger $Y(s) = e^{-s}\frac{s^2+1}{s^3-1} = e^{-s}(\frac{2}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{s-1}{s^2+s+1}) = e^{-s}(\frac{2}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2})$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger svaret:
Svar: $\boldsymbol{y(t) = (\frac{2}{3}e^{(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1))\mathcal{U}(t-1)}$.

---

8. Vi vet att $x(t) = 0$ om $|t| \ge 2\pi$, att $y(t) = 0$ om $|t| \ge \pi$ och att $X(n) = Y(n)$ för alla heltal n. Vi skall uttrycka $y(t)$ med hjälp av $x(t)$:s värden.

Lösning: Vi får $X(\omega)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)\delta(\omega-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(n)\delta(\omega-n) = Y(\omega)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n)$. Men (fs) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n2\pi) \xmapsto{\mathcal{FT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n)$, så inverstransformering ger $x_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-n2\pi) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n2\pi) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-n2\pi) = y_{2\pi}(t)$. $x(t)$ och $y(t)$ har alltså samma 2π-periodiska fortsättning. (Kan alternativt ses av att (fs) $x_{2\pi}(t)$ har fourierkoefficienter $c_n = \frac{1}{2\pi}X(n)$.)
För $|t| < \pi$ är $y(t) = y_{2\pi}(t)$ och $x_{2\pi}(t) = x(t-2\pi) + x(t) + x(t+2\pi)$ (övriga termer är 0), så
Svar: $\boldsymbol{y(t) = x(t-2\pi) + x(t) + x(t+2\pi)}$ för $\boldsymbol{|t| < \pi}$, 0 annars.
