

KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 17 augusti 2010 för T SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook BETA,
Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	26	23	20	17	14	11	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1207.

FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3).

Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

**För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.**

**Den som vt10 blivit godkänd på ks 1, ks 2 eller bonusuppgiften har
automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift 1, 2 respektive 3.**

1. (3p) (Bara för dem som inte klarat ks1.)

Funktionen $y(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1+y^2} e^{x+y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Finn ett samband (utan derivator!) som implicit bestämmer $y(x)$. Du behöver inte lösa ut $y(x)$ ur sambandet.

2. (3p) (Bara för dem som inte klarat ks2.)

Låt $f(t)$ vara en funktion som har fouriertransformen $F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2+e^{|\omega|}}$.

Finn fouriertransformen $G(\omega)$ för funktionen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|t-\tau|}}{1+4(\tau-1)^2+e^{2|\tau-1|}} d\tau.$$

Svaret får innehålla funktionen f och dess derivator, men inga integraler eller faltningar.

3. (Bara för dem som inte klarat bonusuppgiften (röda lappen).)

Låt

$$x(t) = \begin{cases} e^{2t} \cos t, & \text{då } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{då } |t| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a. (1p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$.

b. (1p) Bestäm den generaliserade funktionen $y(t) = x''(t) - 4x'(t) + 5x(t)$.

c. (1p) Använd $y(t)$ för att finna $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.

V.g. vänd!

4. (4p) Finn alla lösningar $x(t)$, $y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 4, y(0) = 2. \end{cases}$$

5. (4p) Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) har pulssvaret

$$h(t) = e^{i\pi t} \operatorname{sinc}(3(t-4)).$$

Vad blir utsignalen $y(t)$ då insignalen är $x(t) = \operatorname{sinc}(3t)$?

$$\operatorname{sinc}(t) \text{ betecknar här (som vanligt) } \sinus \text{ cardinalis, } \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

6a. (2p) Finn koefficienterna b_n i fouriersinusserien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

b. (3p) Finn temperaturen $u(x, t)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ i en värmeledande stav vars ändar hålls vid temperatur 0 och vid $t = 0$ har temperaturen $f(x)$, dvs $u(x, t)$ antas lösa problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

där $k > 0$ är en konstant och $f(x)$ är funktionen i a. Svaret får innehålla beteckningen b_n för koefficienterna i uppgift a (även om den inte lösts).

7. (5p) Finn alla $y(t)$, $t \geq 0$, (med, utom för $t = 1$, $y(t)$ kontinuerlig och av exponentiell typ och $y'(t)$ styckvis kontinuerlig) som uppfyller

$$\begin{cases} y'(t) = \delta(t-1) + \int_0^t y(\tau)(\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)) d\tau \text{ för alla } t > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$\delta(t)$ är här förstås Diracs deltafunktion.

8. (5p) Om funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ vet vi att $x(t) = 0$ om $|t| \geq 2\pi$ och $y(t) = 0$ om $|t| \geq \pi$. Dessutom gäller för deras fouriertransformer $X(\omega)$, $Y(\omega)$ att $X(n) = Y(n)$ för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Uttryck $y(t)$ med hjälp av $x(t)$:s värden.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.