Matematik, KTH

Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II, 2 maj 2011

1. Vi söker $y(x)$ med $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}$ och $y(1) = 0$ och maximalt definitionsintervall, samt detta maximala intervall.

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen. Ingen lösning är definierad för $x = 0$, ty ekvationen blir där $0 = 1$.
Då $x \neq 0$ får vi (standardform) $y' + \frac{4}{x}y = \frac{e^{-x}}{x^3}$ och finner den integrerande faktorn $\mu(x) = e^{\int \frac{4}{x}\,dx} = e^{4\ln|x|} = x^4$. Multiplikation med den ger $(x^4y)' = xe^{-x}$, så (med partialintegration) $x^4y = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$, C en konstant.
Det ger $y(x) = -(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-x} + \frac{C}{x^4}$, som löser ekvationen för alla $x \neq 0$.
Största möjliga lösnings**intervall** som innehåller $x = 1$ ges av $x > 0$.
Villkoret $y(1) = 0$ bestämmer C: $-(1+1)e^{-1} + C = 0$, så $C = \frac{2}{e}$.

Svar: $\boldsymbol{y(x) = -(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-x} + \frac{2}{e\,x^4}}$**, maximalt definitionsintervall ges av** $\boldsymbol{x > 0}$**.**

---

2. Vi söker (fourier-)sinusserien för funktionen $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < \pi$, och värdet serien konvergerar mot då $x = \frac{3\pi}{2}$.

Lösning: Sinusserien för $f(x)$ (definierad på intervallet $]0,\pi[$) ges av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, där, för $n = 1, 2, \ldots$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\mathrm{Im}e^{inx}\,dx = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{(-1+in)x}\,dx = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{(-1+in)\pi}-1}{-1+in}\right) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{((-1)^ne^{-\pi}-1)(-1-in)}{1+n^2}\right) = \frac{2n(1-(-1)^ne^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}$ (alternativt kan man använda formel 330, sid. 175 i BETA.)
f:s sinusserie konvergerar mot en udda, 2π-periodisk funktion som sammanfaller med $f(x)$ då ($f(x)$ är kontinuerlig och) $0 < x < \pi$. För $x = \frac{3\pi}{2}$ konvergerar den alltså mot detsamma som för $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{-\pi}{2}$ (2π-periodisk), nämligen (udda) mot $-f(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Svar: Serien är $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-(-1)^ne^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \sin nx}$**, då** $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$ **konvergent mot** $\boldsymbol{-e^{-\frac{\pi}{2}}}$**.**

---

3. Givet ett LTI-system med utsignal $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$ för insignal $e^{-t}\mathcal{U}(t)$. Vi söker (a.) fouriertransformen $H(\omega)$ för pulssvaret $h(t)$ (dvs överföringsfunktionen) och (b.) pulssvaret $h(t)$.

Lösning: Med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$ gäller för fouriertransformerna att $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ (fb). $x(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ och $y(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t)$ ger (fb igen) $X(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ och $Y(\omega) = \frac{1}{2+i\omega}$, så $H(\omega) = \frac{1+i\omega}{2+i\omega} = 1 - \frac{1}{2+i\omega}$, så $h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\mathcal{U}(t)$.

Svar a: Transformen $\boldsymbol{H(\omega) = \frac{1+i\omega}{2+i\omega}}$**, b: Pulssvaret** $\boldsymbol{h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\mathcal{U}(t)}$**.**

---

4. $\cos(\frac{1}{1+t^2})$ har fouriertransform $F(\omega)$. Sökt är $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|}F(t-\tau)\,d\tau$:s transform.

Lösning: $g(t) = e^{-2|t|} * F(t)$, en faltning, så $G(\omega)$ är produkten av transformerna.
Enligt fb: $e^{-2|t|} \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{4}{4+\omega^2}$ och med dualitet fås $F(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} 2\pi\cos(\frac{1}{1+(-\omega)^2}) = 2\pi\cos(\frac{1}{1+\omega^2})$.

Svar: Den sökta transformen är $\boldsymbol{G(\omega) = 8\pi\frac{\cos(\frac{1}{1+\omega^2})}{4+\omega^2}}$**.**

---

5. Vi söker $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' - 2y = 3\,\delta(t-1)$ och $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Lösning: Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$, $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 1$ och $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$. Insättning i ekvationen ger $s^2Y(s) - s - 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) = 3e^{-s}$, dvs $(s^2+s-2)Y(s) = (s-1)(s+2)Y(s) = s + 2 + 3e^{-s}$. Vi löser ut och partialbråksuppdelar, vilket ger $Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s-1} - \frac{e^{-s}}{s+2}$.
Men $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{f(t-b)\mathcal{U}(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ (då $b \geq 0$, $\mathcal{U}$ Heavisides stegfunktion).

Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(t) = e^t + e^{t-1}\,\mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1)}$**.**

---

6. Vi söker $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) - (-2)\cdot 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 2, 1$. Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

för $\lambda_2 = 1$: $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i \mathbf{k}_i e^{\lambda_i t} = c_1 \mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{2t} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{t}$. Villkoret $\mathbf{x}(0) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ger $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Det ger $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$ och **Svar: Lösningen är** $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = 4e^{2t} - e^t} \\ \boldsymbol{y(t) = 2e^{2t} - e^t.} \end{cases}$

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen blir (med begynnelsevillkoren) $s\mathbf{X} - \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{AX}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x\} \\ \mathcal{L}\{y\} \end{pmatrix}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} s-3 & 2 \\ -1 & s \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{s^2-3s+2} \left(\begin{smallmatrix} s & -2 \\ 1 & s-3 \end{smallmatrix}\right)$, så $\mathbf{X} = \frac{1}{(s-2)(s-1)} \left(\begin{smallmatrix} 3s-2 \\ s \end{smallmatrix}\right)$.
Återtransformering ger samma svar som ovan.

---

7. Vi har $x(t) = \begin{cases} e^{2t-2} - e^{-3t+3}, & 0 < t < 1 \\ e^{-3t-2} - e^{2t+3}, & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ och skall
(a.) bestämma (de generaliserade) derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$ och
(b.) beräkna $x''(t) + x'(t) - 6x(t)$ och med den bestämma $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.

Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig, så $\boldsymbol{x'(t) = \{x'(t)\}} = \begin{cases} \boldsymbol{2e^{2t-2} + 3e^{-3t+3},} & \boldsymbol{0 < t < 1} \\ \boldsymbol{-3e^{-3t-2} - 2e^{2t+3},} & \boldsymbol{-1 < t < 0} \\ \boldsymbol{0,} & \boldsymbol{|t| > 1.} \end{cases}$
(Höger- och vänstergränsvärdena lika i $t = 0, \pm 1$.)
Sprången i $x'(t)$ ger δ-funktioner i $t = 0, \pm 1$ i $x''(t)$, $x''(t) = \{x''(t)\} + \delta$-funktioner,
$$\boldsymbol{x''(t) = -5\delta(t-1) + 5(e^3 + e^{-2})\delta(t) - 5e\delta(t+1) +} \begin{cases} \boldsymbol{4e^{2t-2} - 9e^{-3t+3},} & \boldsymbol{0 < t < 1} \\ \boldsymbol{9e^{-3t-2} - 4e^{2t+3},} & \boldsymbol{-1 < t < 0} \\ \boldsymbol{0,} & \boldsymbol{|t| > 1.} \end{cases}$$
Det ger $\boldsymbol{x''(t) + x'(t) - 6x(t) = -5\delta(t-1) + 5(e^3 + e^{-2})\delta(t) - 5e\delta(t+1)}$ och med fouriertransformation $-\omega^2 X(\omega) + i\omega X(\omega) - 6X(\omega) = -5e^{-i\omega} + 5(e^{-2} + e^3) - 5ee^{i\omega}$, så $\boldsymbol{X(\omega) = 5\frac{e^3 + e^{-2} - e^{-i\omega} - e^{1+i\omega}}{-\omega^2 + i\omega - 6}}$.
Svar a: $\boldsymbol{x'(t), x''(t)}$ som ovan, b: $\boldsymbol{x''(t) + x'(t) - 6x(t), X(\omega)}$ som ovan.

---

8. Vi söker $f(t)$, $t \geq 0$ med $f(0) = 0$ som uppfyller $f'(t) + \int_0^t e^{2u} f(t-u)\,du = 2(\cos t - \sin t)$.
Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ och $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) = sF(s)$, medan integralen är en faltning, så $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2u} f(t-u)\,du\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-2}F(s)$. Vidare gäller $\mathcal{L}\{2(\cos t - \sin t)\} = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$. Man får ekvationen $sF(s) + \frac{1}{s-2}F(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, dvs $\frac{s^2-2s+1}{s-2}F(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, så $F(s) = \frac{2(s-2)}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}$ (partialbråksuppdelning) och
Svar: $\boldsymbol{f(t) = \cos t + 3\sin t - e^t.}$

---

9. Vi söker (a.) allmänna lösningen $u(x,t)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$ till $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial u}{\partial t}$ med $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ för $t \geq 0$ och (b.) lösningen då $u(x,0) = \sin 3x$ för $0 \leq x \leq \pi$.

Lösning: Variabelseparation. Vi söker en lösning av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ till ekvationen och randvillkoren. Ekvationen ger $X''T + XT = XT'$, dvs $\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T'}{T}$. Eftersom ingen annan term innehåller x, måste $\frac{X''}{X}$ vara konstant, kalla den $-\lambda$, så $\frac{T'}{T} = 1 - \lambda$. Randvillkoren ger problemet $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$, vilket har lösningar (andra än 0) precis då $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, nämligen $X_n(x) = a_n \sin nx$. (Motiveras som i ZC.)
Motsvarande T-lösningar är $T_n(t) = b_n e^{(1-n^2)t}$.
Hela de separerade lösningarna är alltså $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin nx\, e^{(1-n^2)t}$.
Superposition ger allmänna lösningen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx\, e^{(1-n^2)t}$.
I b. bestäms koefficienterna c_n av begynnelsevillkoret, $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \sin 3x$, $0 < x < \pi$. Tydligen $c_3 = 1$ och $c_n = 0$, $n \neq 3$.
Svar a: $\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx\, e^{(1-n^2)t}}$, b: $\boldsymbol{u(x,t) = \sin 3x\, e^{-8t}}$.

---

10. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \cos(4\omega)\, e^{-|\omega|}$. Vi söker
(a.) $x(t)$ och (b.) alla L så att $x(t)$:s L-periodiska fortsättning $x_L(t)$ är $\frac{L}{2}$-periodisk.

Lösning: Enligt fs (BETA F41b.) $\frac{1}{\pi(1+t^2)} \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{-|\omega|}$, så $X(\omega) = \cos(4\omega)e^{-|\omega|} = \frac{1}{2}e^{i4\omega}e^{-|\omega|} + \frac{1}{2}e^{-i4\omega}e^{-|\omega|}$ ger (BETA F7.) $x(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(1+(t+4)^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(1+(t-4)^2)}$.

Fourierserien för den L-periodiska $x_L(t)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}t}$ har koefficienter $c_n = \frac{1}{L}X(n\frac{2\pi}{L}) = \frac{1}{L}\cos(4n\frac{2\pi}{L})e^{-|n\frac{2\pi}{L}|}$ (enligt fb eller kort bevis). Funktionen är $\frac{L}{2}$-periodisk precis om $c_n = 0$ för **alla udda** n ($e^{in\frac{2\pi}{L}t}$ är ju $\frac{L}{2}$-periodisk precis om n är jämnt och termerna är linjärt oberoende). Villkoret är alltså att $\cos(4n\frac{2\pi}{L}) = \cos(n\frac{16}{L}\frac{\pi}{2}) = 0$, dvs att $n\frac{16}{L}$ är ett udda heltal, för alla udda n. Det inträffar precis om $\frac{16}{L}$ är ett udda heltal ($n = 1$ är udda, så det är nödvändigt, men uppenbart tillräckligt).

Svar a: $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+(t+4)^2} + \frac{1}{1+(t-4)^2}\right)}$**,**

b: $\boldsymbol{x_L(t)}$ **är** $\boldsymbol{\frac{L}{2}}$**-periodisk precis om** $\boldsymbol{L = \frac{16}{k}}$ **för ett udda heltal** $\boldsymbol{k}$**.**
