Matematik, KTH

Tentamen måndagen den 2 maj 2011 för T
SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II

Skrivtid: 13.00–18.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook BETA, Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	31	26	22	18	15	poäng

Betygen A–E gäller för **kurs SF1634** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1207** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).
Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får Fx(/K), dvs rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

Den som vt11 blivit godkänd på ks n har automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift n, $n = 1, 2, \dots 5$.

DEL I

Du som klarat ks n, gör inte uppgift n!
Ange på omslaget vilka ks:ar du har klarat.

OBS! För godkänd tentamen krävs (bl.a.) minst 12p på del I.

1. (3p) Finn lösningen $y(x)$ med maximalt definitionsintervall till $\begin{cases} x^3y' + 4x^2y = e^{-x} \\ y(1) = 0. \end{cases}$
Ange också definitionsintervallet.

2. (3p) Finn (fourier-)sinusserien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ för funktionen
$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \pi.$$
Vilket värde konvergerar serien mot då $x = \frac{3\pi}{2}$?

3. Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) är sådant att insignalen $e^{-t}\mathcal{U}(t)$ ger utsignalen $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$.
 a. (2p) Vad är fouriertransformen $H(\omega)$ för pulssvaret $h(t)$?
 b. (1p) Vad är pulssvaret $h(t)$?
$\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ eller $u(t)$.

4. (3p) Låt $F(\omega)$ vara fouriertransformen till funktionen $\cos(\frac{1}{1+t^2})$.
Finn fouriertransformen till funktionen $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|} F(t-\tau)\, d\tau$.
Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar. (Du behöver inte bestämma $g(t)$.)

5. (3p) Finn lösningen $y(t)$ till problemet $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3\,\delta(t-1) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

$\delta(t)$ är förstås Diracs deltafunktion.

V.g. vänd!

DEL II

6. (4p) Finn funktioner $x(t)$ och $y(t)$ så att (x', y' betecknar förstås $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$)

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Låt funktionen $x(t)$ ges av $x(t) = \begin{cases} e^{2t-2} - e^{-3t+3}, & 0 < t < 1 \\ e^{-3t-2} - e^{2t+3}, & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

a. (2p) Bestäm (de generaliserade) derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$.

b. (2p) Beräkna $x''(t) + x'(t) - 6x(t)$ och använd den för att bestämma $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.

8. (4p) Finn alla $f(t)$, $t \geq 0$, (med $f(t)$ kontinuerlig och av exponentiell typ och $f'(t)$ styckvis kontinuerlig) med $f(0) = 0$ som uppfyller

$$f'(t) + \int_0^t e^{2u} f(t-u)\, du = 2(\cos t - \sin t).$$

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9a. (4p) Finn den allmänna lösningen $u(x,t)$ (t.ex. som en serie) till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial u}{\partial t}, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

b. (1p) Vad blir lösningen om $u(x,0) = \sin 3x$ för $0 \leq x \leq \pi$?

10. En funktion (signal) $x(t)$ har fouriertransformen

$$X(\omega) = \cos(4\omega)\, e^{-|\omega|}.$$

a. (2p) Finn $x(t)$. (Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar.)

b. (3p) För vilka värden på L är den L-periodiska fortsättningen av $x(t)$,

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nL),$$

periodisk med period $\frac{L}{2}$?

Uppgift b. kan lösas utan att a. har lösts.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.