Matematik, KTH

Lösningsförslag tenta SF1634(/5B1207), Diffekvationer II, 16 augusti 2011

Tryckfel kan förekomma.

1. Vi söker $\mathbf{x}(t) = \binom{x}{y}$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \binom{0}{2}$.

Lösning:

Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)5 \cdot 1 = \lambda^2 - 1 + 5 = \lambda^2 + 4$, med lösningar $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$.
För $\lambda_1 = 2i$: $\left(\begin{matrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & -1+2i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \binom{1-2i}{1}$.
$\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} = \binom{1-2i}{1}(\cos 2t + i \sin 2t) = \binom{\cos 2t + 2\sin 2t}{\cos 2t} + i \binom{\sin 2t - 2\cos 2t}{\sin 2t}$, så ($\mathbf{A}$ är reell) den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = c_1 \binom{\cos 2t + 2\sin 2t}{\cos 2t} + c_2 \binom{\sin 2t - 2\cos 2t}{\sin 2t}$.
Villkoret $\mathbf{x}(0) = c_1 \binom{1}{1} + c_2 \binom{-2}{0} = \binom{0}{2}$ ger $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Det ger

$\mathbf{x}(t) = \binom{5\sin 2t}{2\cos 2t + \sin 2t}$ och **Svar: Lösningen är** $\boldsymbol{\begin{cases} x(t) = 5\sin 2t \\ y(t) = 2\cos 2t + \sin 2t. \end{cases}}$

Alternativt, med laplacetransform: $\mathcal{L}$ av matrisekvationen blir (med begynnelsevillkoren) $s\mathbf{X} - \binom{0}{2} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ (där $\mathbf{X} = \mathcal{L}\{\binom{x}{y}\} = \binom{\mathcal{L}\{x\}}{\mathcal{L}\{y\}}$), så $\mathbf{X} = (sI - \mathbf{A})^{-1} \binom{0}{2} = \begin{pmatrix} s+1 & -5 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \binom{0}{2} = \frac{1}{s^2+4} \begin{pmatrix} s-1 & 5 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} \binom{0}{2} = \begin{pmatrix} 5\frac{2}{s^2+4} \\ 2\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} \end{pmatrix}$. Återtransformering ger svaret.

---

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ för $0 < x \le 1$, $= 0$ för $-1 < x \le 0$ har fourierserien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$. Vi söker (a) värdet serien konvergerar mot då $x = 5$, (b) värdet av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n$ och (c) värdet av $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$.

Lösning:

Serien är 2-periodisk, så för $x = 5$ konvergerar den mot samma värde som för $x = 1$, nämligen mot medelvärdet av hö- och vä-gränsvärdena (av f:s 2-periodiska fortsättning) där, $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ konvergerar mot $f(x)$:s udda del, dvs mot $f_u(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $-1 < x < 1$ (jämna delen är $\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$), så $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n$ konvergerar mot $f_u(\frac{1}{\pi}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^2+1}}$ (f_u är kontinuerlig där).
$\int_{-1}^{1}(f_u(x))^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_m b_n \int_{-1}^{1} \sin mx \sin nx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2 \int_{-1}^{1} \sin^2 nx\,dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$ (Parsevals relation, kan tas direkt från fs).
Så $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{4}\left[x - \arctan x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

Svar: Serierna konvergerar mot a: $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$**, b:** $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\pi^2+1}}}$ **och c:** $\boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}}$**.**

---

3. $x(t)$ är 2π-periodisk och $= \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-t}$ för $-\pi < t \le \pi$. Vi söker (a) $x'(t)$ för alla t och (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(x(t) + x'(t))\cos t\,dt$.

Lösning:

$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{för } 0 < t \le \pi \\ -e^{-t} & \text{för } -\pi < t < 0 \end{cases}$ och 2π-periodisk, så

$x'(t) = 2\delta(t) - (e^{\pi} + e^{-\pi})\delta(t-\pi) + \begin{cases} -e^{-t} & \text{för } 0 < t \le \pi \\ e^{-t} & \text{för } -\pi < t < 0 \end{cases} =$

$= 2\delta(t) - (e^{\pi} + e^{-\pi})\delta(t-\pi) - \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-t}$ och 2π-periodisk.

Det ger $x(t) + x'(t) = 2\delta(t) - (e^{\pi} + e^{-\pi})\delta(t-\pi)$ och 2π-periodisk, så $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(x(t) + x'(t))\cos t\,dt =$
$2\cos 0 - (e^{\pi} + e^{-\pi})\cos\pi = 2 + e^{\pi} + e^{-\pi}$ (bara δ-pulserna i 0 och π ligger i integrationsområdet).

Svar a: $\boldsymbol{x'(t) = 2\delta(t) - (e^{\pi} + e^{-\pi})\delta(t-\pi) - \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-t}}$ **och** $\boldsymbol{2\pi}$**-periodisk,**
b: Värdet är $\boldsymbol{2 + e^{\pi} + e^{-\pi}}$**.**

---

4. Vi söker $x(t)$ som har fouriertransformen $X(\omega) = \frac{e^{2i\omega}\omega^3}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$.

Lösning:

$X(\omega) = e^{2i\omega}\omega\frac{\omega^2}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = e^{2i\omega}\left(\frac{4}{3}\frac{\omega}{\omega^2+4} - \frac{1}{3}\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)$. Enligt fs är det $e^{2i\omega}\cdot$transformen av $\frac{i}{2}(\frac{4}{3}e^{-2|t|} - \frac{1}{3}e^{-|t|})\operatorname{sgn}(t)$, så (fs igen) $x(t) = (\frac{2i}{3}e^{-2|t+2|} - \frac{i}{6}e^{-|t+2|})\operatorname{sgn}(t+2)$.

Svar: $\boldsymbol{x(t) = (\frac{2i}{3}e^{-2|t+2|} - \frac{i}{6}e^{-|t+2|})\operatorname{sgn}(t+2)}$**.**

---

5. Vi söker $y(5)$ då $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4)$ och $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

Lösning:
Laplacetransformering av ekvationen ger, med $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3$, $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 5$ och $\mathcal{L}\{\delta(t-4)\} = e^{-4s}$, att $s^2Y(s) - 3s - 5 + 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = e^{-4s}$, dvs $(s^2+3s+2)Y(s) = (s+2)(s+1)Y(s) = 3s + 14 + e^{-4s}$. Vi löser ut och partialbråksuppdelar, vilket ger $Y(s) = -\frac{8}{s+2} + \frac{11}{s+1} - \frac{e^{-4s}}{s+2} + \frac{e^{-4s}}{s+1}$. Eftersom $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ och $\mathcal{L}\{f(t-b)\mathcal{U}(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ (då $b \geq 0$, $\mathcal{U}$ är Heavisides stegfunktion) fås $y(t) = 11e^{-t} - 8e^{-2t} + \left(e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)}\right)\mathcal{U}(t-4)$.
Svar: Det sökta värdet är $\boldsymbol{y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}}$.

---

6. Vi söker den allmänna lösningen till $xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = e^{-x}\ln x, \quad x > 0$
(och använder att $y(x) = e^{-x}$ löser $xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = 0$).

Lösning:
$y(x) = e^{-x}$ ger $y' = -e^{-x}$ och $y'' = e^{-x}$. Insättning i den homogena ekvationen ger VL $= (x - (2x+1) + (x+1))e^{-x} = 0 =$ HL, ok.
För att lösa den inhomogena ekvationen sätter vi ("reduktion av ordningen") $y(x) = u(x)e^{-x}$. Då blir $y' = (u' - u)e^{-x}$, $y'' = (u'' - 2u' + u)e^{-x}$ och insättning i ekvationen ger $(x(u'' - 2u' + u) + (2x+1)(u' - u) + (x+1)u)e^{-x} = e^{-x}\ln x$, dvs $xu'' + u' = \ln x$, så $u'' + \frac{1}{x}u' = \frac{\ln x}{x}$, en linjär ekvation för u'. Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$ (för $x > 0$), så ekvationen blir $(xu')' = \ln x$ (kunde man förstås se direkt), med lösning $xu' = x\ln x - x + c_1$, dvs $u' = \ln x - 1 + \frac{c_1}{x}$ och $(x > 0)$ $u(x) = x\ln x - x - x + c_1\ln x + c_2$ med c_1, c_2 godtyckliga konstanter. $y(x) = u(x)e^{-x}$ ger
Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = xe^{-x}\ln x - 2xe^{-x} + c_1e^{-x}\ln x + c_2e^{-x}}$, med $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ godtyckliga konstanter.

---

7. $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \begin{cases} e^{-2\omega} & -1 < \omega < 3 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$
Vi söker dels (a) transformerna för $tx(t)$ och $t^2x(t)$ och dels (b) $x(t)$.

Lösning:
$tx(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} i\frac{d}{d\omega}X(\omega) = i(e^2\delta(\omega+1) - e^{-6}\delta(\omega-3)) + i \cdot \begin{cases} -2e^{-2\omega} & -1 < \omega < 3 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} =$
$= i(e^2\delta(\omega+1) - e^{-6}\delta(\omega-3)) - 2iX(\omega)$.
P.s.s. $t^2x(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} i\frac{d}{d\omega}$ av ovanstående, dvs $-e^2\delta'(\omega+1) + e^{-6}\delta'(\omega-3) - 2i(i\frac{d}{d\omega}X(\omega)) =$
$= -e^2\delta'(\omega+1) + e^{-6}\delta'(\omega-3) + 2e^2\delta(\omega+1) - 2e^{-6}\delta(\omega-3) - \begin{cases} 4e^{-2\omega} & -1 < \omega < 3 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$
Det ger att $(t+2i)x(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} i(e^2\delta(\omega+1) - e^{-6}\delta(\omega+3))$, men enligt fs $e^{-it} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2\pi\delta(\omega+1)$ och $e^{i3t} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2\pi\delta(\omega+3)$, så $\frac{i}{2\pi}(e^2e^{-it} - e^{-6}e^{i3t}) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} i(e^2\delta(\omega+1) - e^{-6}\delta(\omega+3))$.
Inverstransformering och förenkling ger svaret.

Svar a: $\boldsymbol{tx(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} i(e^2\delta(\omega+1) - e^{-6}\delta(\omega-3)) - 2iX(\omega)}$,
$\boldsymbol{t^2x(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} -e^2\delta'(\omega+1) + e^{-6}\delta'(\omega-3) + 2e^2\delta(\omega+1) - 2e^{-6}\delta(\omega-3) - 4X(\omega)}$,
b: $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi(2-it)}(e^{2-it} - e^{-3(2-it)})}$.

---

8. Vi söker $y(t)$, $t \geq 0$, med $\int_0^\infty e^{-t}y(t)\,dt = 1$ och $\int_0^t \tau y(\tau)\,d\tau = \int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$, $t > 0$.

Lösning:
Det första villkoret ger att $Y(1) = 1$, där $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, laplacetransformen.
Transformering av ekvationen ger $\frac{1}{s}\mathcal{L}\{ty(t)\} = \frac{1}{s}(-Y'(s)) = \mathcal{L}\{(y*y)(t)\} = Y(s)^2$ och alltså $-\frac{Y'}{Y^2} = (\frac{1}{Y})' = s$, så $\frac{1}{Y} = \frac{s^2}{2} + C$ för en konstant C. $Y(1) = 1$ ger $C = \frac{1}{2}$ och $Y(s) = \frac{2}{s^2+1}$, så **Svar: $\boldsymbol{y(t) = 2\sin t,\ t \geq 0}$.**

---

9. Vi söker (a) den allmänna lösningen till $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$ och (b) lösningens dominerande term då $u(x,0) = 1$ för $0 \leq x \leq \pi$.

Lösning:
Variabelseparation. Vi söker en lösning av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ till ekvationen och randvillkoren. Ekvationen ger $X''T + X'T = XT'$, dvs $\frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} = \frac{T'}{T}$. Eftersom VL bara beror av x och HL bara beror av t är de båda konstanta, $= -\lambda$ säg.
För $X(x)$ fås $X'' + X' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0$. Karakteristisk ekvation för den är $k^2 + k + \lambda = 0$, med lösningar $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$.
Om $k_{1,2}$ båda är reella ger randvillkoren bara den triviala lösningen 0 ($X(x) = Ae^{ax} + Be^{bx}$ ger $A + B = Ae^{a\pi} + Be^{b\pi} = 0$ och $X(x) = (A + Bx)e^{ax}$ ger $A = (A + B\pi)e^{a\pi} = 0$. I båda fallen fås $A = B = 0$). Annars (om $\lambda > \frac{1}{4}$), låt $\mu^2 = \lambda - \frac{1}{4}$, $\mu > 0$. Då är lösningen till X-ekvationen $X(x) = e^{-\frac{x}{2}}(A\cos\mu x + B\sin\mu x)$ och randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0$ ger $A = e^{-\frac{\pi}{2}}(A\cos\mu\pi + B\sin\mu\pi) = 0$, dvs $A = B\sin\mu\pi = 0$. Lösningar (andra än 0,0) precis då $\mu\pi = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots$ ($\mu > 0$, ju). Låt $X_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\sin nx,\ n = 1, 2, \ldots$. Motsvarande $\lambda_n = \frac{1}{4} + n^2$ och $T_n(t) = e^{-(\frac{1}{4}+n^2)t}$.
Superposition ger allmänna lösningen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{x}{2}} \sin nx\, e^{-(\frac{1}{4}+n^2)t}$.
Koefficienterna c_n bestäms av begynnelsevillkoret, $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{x}{2}} \sin nx = 1,\ \ 0 < x < \pi$, dvs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = e^{\frac{x}{2}},\ \ 0 < x < \pi$. Det ger (sinusserie) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{x}{2}} \sin nx\, dx$.
Den dominerande termen ges av $n = 1$ med $c_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{x}{2}} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{(\frac{1}{2}+i)x}\, dx = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+i\pi} - 1}{\frac{1}{2}+i} = \frac{8}{5\pi}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$.
Svar a: Den allmänna lösningen är $\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{x}{2}} \sin nx\, e^{-(\frac{1}{4}+n^2)t}}$,
b: Den dominerande termen är $\boldsymbol{u_1(x,t) = \frac{8}{5\pi}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)e^{-\frac{x}{2}} \sin x\, e^{-\frac{5}{4}t}}$.

---

10. Vi söker $X(\omega)$ då $x(t)$ är kontinuerlig, $x(n) = \frac{1}{n^2+25}$ för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ och $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \pi$.

Lösning:
$x(t)$ är kontinuerlig, så $x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-n) = \frac{1}{t^2+25} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$.
Fouriertranformering (fs) ger $X(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) = \frac{\pi}{5} e^{-5|\omega|} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$, dvs $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n) = \frac{\pi}{5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-5|\omega - 2\pi n|}$.
För $|\omega| < \pi$ är ($X(\omega - 2\pi n) = 0$ om $n \neq 0$) VL $= X(\omega) = \frac{\pi}{5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-5|\omega - 2\pi n|} =$

$$= \frac{\pi}{5}\left(e^{-5|\omega|} + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-5(\omega - 2\pi n)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{5(\omega - 2\pi n)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{5}\left(e^{-5|\omega|} + (e^{-5\omega} + e^{5\omega})\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-2\pi})^n\right) = \frac{\pi}{5}\left(e^{-5|\omega|} + \frac{2\cosh 5\omega}{e^{2\pi} - 1}\right)$$

För $|\omega| \geq \pi$ är $X(\omega) = 0$.

Svar: $\boldsymbol{X(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{5}\left(e^{-5|\omega|} + \frac{2\cosh 5\omega}{e^{2\pi}-1}\right) & \textbf{för } |\omega| < \pi \\ 0 & \textbf{för } |\omega| \geq \pi. \end{cases}}$
