Matematik, KTH

Tentamen tisdagen den 16 augusti 2011 för T
SF1634(/5B1207), Differentialekvationer II

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook BETA, Kompletterande formelblad för kursen SF1634.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	31	26	22	18	15	poäng

Betygen A–E gäller för **kurs SF1634** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1207** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).
Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får Fx(/K), dvs rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

Den som vt11 blivit godkänd på ks n har automatiskt 3p på (och skall inte göra) uppgift n, $n = 1, 2, \ldots 5$.

DEL I

Du som klarat ks n, gör inte uppgift n!
Ange på omslaget vilka ks:ar du har klarat.

OBS! För godkänd tentamen krävs (bl.a.) minst 12p på del I.

1. (3p) Finn funktioner $x(t)$ och $y(t)$ så att (x', y' betecknar förstås $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$)

$$\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = -x + y \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

2. Funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ för $0 < x \le 1$ och $f(x) = 0$ för $-1 < x \le 0$.
Dess fourierserie är $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$.

a. (1p) Vilket värde konvergerar serien mot då $x = 5$?
b. (1p) Vilket värde konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n$ mot?
c. (1p) Vilket värde konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$ mot?

3. Låt $x(t)$ vara 2π-periodisk och $= \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-t}$ för $-\pi < t \le \pi$.

a. (2p) Finn den generaliserade derivatan $x'(t)$ för alla t.
b. (1p) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x(t) + x'(t)) \cos t \, dt$.

4. (3p) Finn den funktion $x(t)$ som har fouriertransformen

$$X(\omega) = \frac{e^{2i\omega}\omega^3}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar.

V.g. vänd!

5. (3p) Låt $y(t)$ vara lösningen till $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4), & t > 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5. \end{cases}$

Vad är $y(5)$? $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

DEL II

6. (4p) Finn den allmänna lösningen $y(x)$ till ekvationen

$$xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = e^{-x}\ln x, \quad x > 0.$$

Ledning: Notera att $y(x) = e^{-x}$ uppfyller $xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

7. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \begin{cases} e^{-2\omega} & -1 < \omega < 3 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$

a. (2p) Bestäm fouriertransformerna (som kan vara generaliserade funktioner) för $tx(t)$ och $t^2x(t)$.

b. (2p) Använd $X(\omega)$ och resultatet i **a.** för att bestämma $x(t)$.
Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar.

8. (4p) Finn $y(t)$, $t \geq 0$, som uppfyller $\int_0^\infty e^{-t}y(t)\,dt = 1$ och

$$\int_0^t \tau y(\tau)\,d\tau = \int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\,d\tau \quad \text{för alla } t > 0.$$

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9a. (3p) Finn den allmänna lösningen $u(x,t)$ (t.ex. som en oändlig serie) till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Glöm inte att motivera varför just dessa termer skall vara med i serien.

b. (2p) Beräkna den dominerande (då $t \to \infty$) termen i lösningen (dvs den term som avtar långsammast då t växer), om $u(x,0) = 1$ för $0 \leq x \leq \pi$.

10. (5p) En kontinuerlig funktion (signal) $x(t)$ och dess fouriertransform $X(\omega)$ uppfyller

$$\begin{cases} x(n) = \frac{1}{n^2+25} & \text{för } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ X(\omega) = 0 & \text{då } |\omega| \geq \pi. \end{cases}$$

Finn $X(\omega)$.
Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar. För full poäng krävs ett slutet uttryck, men delpoäng kan ges för svar innehållande oändliga serier.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.