

Signaler och system I för E2 och IT2, 5B1209, Me 5B1215/2

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2005–03–18

1) Lösning

För $x \neq 1$ observerar vi att ekv(1) i texten kan skrivas som

$$y' = \frac{x(2y^2 + 1)}{y(x^2 - 1)} \quad (1)$$

som i sin tur leder till

$$\int \frac{y \, dy}{2y^2 + 1} = \int \frac{x \, dx}{x^2 - 1} \quad (2)$$

ma o

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C_1 \quad (3)$$

och delsvaret blir

$$2y^2 + 1 = C_2(x^2 - 1)^2, \text{ med } C_2 = e^{4C_1} \quad (4)$$

Med insatt villkor blir $C_2 = 1$ och vi får svaret

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + (x^2 - 1)^2)}, \quad x \geq \sqrt{2}$$

2) Lösning

Lösningen följer i princip avsnitt 8.2.3 i Zill&Cullen, (s 384).

Med bokens beteckningar gäller för oss:

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta = 1 - j, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ j \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}\{\mathbf{K}_1\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}\{\mathbf{K}_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}, \quad \mathbf{X}_2 = (\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \sin \beta t)e^{\alpha t}$$

Eftersom $\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2$ får vi nu med de givna värden:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ C_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right] + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right] \right\} e^t \quad (5)$$

och vi får slutsvaret:

$$x_1 = (2C_1 \cos t - 2C_2 \sin t)e^t, \quad x_2 = (C_1 \sin t + C_2 \cos t)e^t$$

3) Lösning

Rötterna av polynomet $\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$ är $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ och $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ med $\lambda = e^{j\omega}$.
Partialbråksuppdelning

$$\frac{-\frac{5}{6}e^{-j\omega} + 5}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} = \frac{A}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (6)$$

leder kvickt till $A = 4, B = 1$. Signalbehandlingens formelsamling sid 18(7.18) ger svaret

$$x[n] = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

4) Lösning

Med tanke på kvotregeln inser man ganska snabbt att $f(t)$ också kan skrivas som

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{t^2 + t + 1} = -\frac{d}{dt} g(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = -j\omega G(\omega) \quad (7)$$

Återstår bestämningen av $G(\omega)$ som kan göras m h a Beta t ex .

Eftersom $\frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ kan vi med fördel använda transformen av

translationen $\frac{1}{(t - T)^2 + a^2}$ där vi har $T = -1/2$ och $a^2 = 3/4$. Detta leder först till

$$\frac{1}{(t - T)^2 + a^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-j\omega T} \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \quad (8)$$

och till sist, med insatta värden

$$G(\omega) = e^{j\omega/2} \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} e^{-|\omega|\sqrt{3}/2} \quad (9)$$

Kombinerar vi ekv(7) och ekv(9) får vi svaret

$$F(\omega) = -j\omega e^{j\omega/2} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-|\omega|\sqrt{3}/2}$$

5) Lösning

Börja med

$$x[n] = 10 \cos(0,13\pi n + \pi/13) \quad (10)$$

och jämför det med

$$x[nT] = A \cos(2\pi(f_0/f_s)n + \varphi) \quad (11)$$

Då får vi direkt $A = 10$ och $2(f_0/f_s) = 0,13 \implies f_0 = (0,13)1000/2 = 65$ Hz och $\varphi = \pi/13$ med resultatet $x_0(t) = 10 \cos(2\pi(65)t + \pi/13)$, inte oväntad. De andra frekvenserna f_m får vi genom att studera

$$f_m = |f_0 \pm m f_s| = |65 \pm m1000| < 1000 \text{ Hz} \quad (12)$$

Den sista olikheten satisfieras endast av $m = 0$ och $m = 1$ vilket leder till x_0 enligt ovan och $x_1(t) = 10 \cos(2\pi(-935)t + \pi/13) = 10 \cos(2\pi(935)t - \pi/13)$. Observera minustecknet i argumentet. Alltså får vi svaret:

$A = 10, f_0 = 65 \text{ med } \varphi_0 = \pi/13, \text{ samt } f_1 = 935 \text{ med } \varphi_1 = -\pi/13$

6) Lösning

a) Vi ansätter $y_{\text{part}} = a \cos 2nt + b \sin 2nt$, deriverar 2 ggr och sätter in i

$$y''_{\text{part}} + 4y_{\text{part}} = \sin 2nt \quad (13)$$

som ger efter enkla algebraiska räkningar

$$\cos 2nt(-4an^2 + 4a) + \sin 2nt(-4bn^2 + 4b) = \sin 2nt \quad (14)$$

Vi har 2 fall:

I) $n \neq 1$: som resulterar i $a = 0$, $b = \frac{1}{4(1-n^2)}$ m a o

$y_{\text{part},1} = \frac{1}{4(1-n^2)} \sin 2nt, \text{ för } n \neq 1$

II) $n = 1$: $y''_{\text{part},2} + 4y_{\text{part},2} = \sin 2t$ med resonans. I detta fall måste vi ansätta $y_{\text{part},2} = t(c \sin 2t + d \cos 2t)$. Efter 2 ggr derivering och insättning i differentialekvationen ekv(13) får vi sambandet

$$4c \cos 2t - 4d \sin 2t = \sin 2t \quad (15)$$

med $c = 0$, $d = -\frac{1}{4}$ alltså

$y_{\text{part},2} = -\frac{1}{4} t \cos 2t, \text{ för } n = 1$

- b) Vi vet att allmänt gäller $f(t) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nt/T + b_n \sin 2\pi nt/T)$, att perioden $T = \pi \rightarrow \omega_0 = 2\pi/T = 2$, och att $f(t)$ är en udda funktion, vilket innebär att $a_0 = a_n = 0$. Vi skall alltså utveckla $f(t)$ i en Fourier-sinusserie:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nt \quad (16)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -t \sin 2nt \, dt = \langle \text{se Beta med } a=2n \rangle = \quad (17)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{4n^2} (\sin 2nt - 2nt \cos 2nt) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dots = \frac{(-1)^n}{n} \quad (18)$$

Fourier-serien blir härmed

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin 2nt$$

- c) Först söker vi en homogen lösning till

$$y''_{\text{hom}} + 4y_{\text{hom}} = 0$$

Den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2j$ som ger

$$y_{\text{hom}} = A \cos 2t + B \sin 2t \quad (19)$$

och till slut

$$y_{\text{tot}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{part},1} - y_{\text{part},2} \implies$$

$$\text{Svaret: } y_{\text{tot}} = A \cos 2t + B \sin 2t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4-n^2)} \sin 2nt + \frac{1}{4} t \cos 2t$$

Observera minustecknet framför $y_{\text{part},2}$ p g a att $b_1 = -1$, se ekv(18).
