

Lösningsskisser till tenta 5B1209/1215:2, Signaler och system I, för IT och ME, 051021

1. De båda lösningarna $y = x$ och $y = x^2$ är linjärt oberoende (ingen av dem är en konstant multipel av den andra). Den homogena ekvationens allmänna lösning är därför

$$y_h = A x + B x^2, x > 0.$$

Ansatsen

$$y = A(x) x + B(x) x^2$$

i den inhomogena ekvationen ger villkoret

$$W \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

där W är Wronskimatrisen

$$W = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^{-1} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix},$$

varav

$$A(x) = - \int \frac{1}{x} dx = -\frac{x^2}{2} - \ln x (+ C),$$

$$B(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = x - \frac{1}{x} (+ C).$$

Man får som en partikulärlösning till den givna inhomogena ekvationen:

$$y_p = \frac{x^2}{2} - \ln x - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} x^2 = \frac{x^3}{2} - x \ln x - x$$

Motsvarande allmänna lösning är då

$$y = y_p + y_h = \frac{x^3}{2} - x \ln x - x + A x + B x^2.$$

$$\textbf{Svar: } y = \frac{x^3}{2} - x \ln x - x + A x + B x^2.$$

2. Laplacetransformering (t.ex med hjälp av motsvarande avsnitt i b) av ekvationen ger:

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 6(s Y(s) - y(0)) + 13 Y(s) = 3 e^{-sp}.$$

Eftersom $y(0) = 1$ och $y'(0) = -3$ kan detta skrivas om till

$$(s^2 + 6s + 13)Y(s) = s + 3 + 3 e^{-sp}$$

€

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + \frac{3}{(s+3)^2 + 2^2} e^{-sp}.$$

Inför återtransformering kan man observera att

$$\frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-3t} \cos 2t,$$

$$\frac{3}{(s+3)^2 + 2^2} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 2t$$

och

$$\frac{3}{(s+3)^2 + 2^2} e^{-sp} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{3}{2} e^{-3(t-p)} \sin 2(t-p) u(t-p),$$

där $u(t)$ är enhetssprånget ("the unit step function").

Man får

$$\text{Svar: } y = e^{-3t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{3p} \sin 2t \cdot u(t-p)$$

2+ Syntesekvationen för TDFT ger att

$$\begin{aligned} 2\pi x[n] &= \int_{-p}^p X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \int_{-p}^p \cos(\omega/2) e^{jn\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-p}^p (e^{j\omega(n+1/2)} + e^{j\omega(n-1/2)}) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j\omega(n+1/2)}}{j(n+1/2)} + \frac{e^{j\omega(n-1/2)}}{j(n-1/2)} \right]_{-p}^p = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jpn} \cdot e^{jp/2} - e^{-jpn} \cdot e^{-jp/2}}{j(n+1/2)} + \frac{e^{jpn} \cdot e^{-jp/2} - e^{-jpn} \cdot e^{jp/2}}{j(n-1/2)} \right] \end{aligned}$$

Men

$$e^{jpn} = e^{-jpn} = (-1)^n \text{ och } e^{jp/2} = -e^{-jp/2} = j,$$

alltså

$$2\pi x[n] = (-1)^n \left[\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{n-1/2} \right] = -(-1)^n \frac{1}{n^2 - 1/4} = (-1)^n \frac{4}{1 - 4n^2}.$$

dvs

$$\text{Svar: } x[n] = (-1)^n \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)}.$$

3. Skrivvariant I: Enligt uppgiften är

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+1)e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases}$$

Funktionen är uppenbarligen kontinuerlig då $t \neq 0$, men också då $t = 0$, eftersom höger- och vänstergränsvärdena av x då $t \rightarrow 0$ båda är $= 0$. Den generaliserade derivatan är därför.

$$x'(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+1)e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases}$$

Denna är inte kontinuerlig för $t = 0$ eftersom högergränsvärdet är $= 0$ medan vänstergränsvärdet $= 1 \cdot e^0 = 1$. Derivatan har alltså ett språng med höjd -1 för $t = 0$. Detta ger

$$x''(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+2)e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad \delta(t)$$

$$\text{och } x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+2)e^t - 2(t+1)e^t + e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad \delta(t) - \delta(t) = -\delta(t).$$

$$\begin{aligned} \text{Svar: } x'(t) &= \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+1)e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad x''(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t > 0, \\ (t+2)e^t, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad \delta(t) - \delta(t), \\ x''(t) - 2x'(t) + x(t) &= -\delta(t). \end{aligned}$$

Skrivvariant II: "Vanlig" kalkyl med derivator tillsammans med att

$$u'(t) = \delta(t) \text{ och } d(t) = d(-t) \text{ ger}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} (te^t + e^t) u(-t) + (-1)t e^t d(-t).$$

Med tanke på att $y(t)d(-t) = y(t)d(t) = y(0)\delta(t)$ om y är kontinuerlig för $t = 0$, så förenklas detta till att

$$x'(t) = (t+1)e^t u(-t) + 0 \cdot \delta(t) = (t+1)e^t u(-t).$$

På samma sätt får man andraderivatan:

$$x''(t) = (t+1+1)e^t u(-t) + (-1)(t+1)e^t d(-t) = (t+2)e^t u(-t) - d(t),$$

varav

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = ((t+2) - 2(t+1) + t)e^t u(-t) - d(t) = -d(t).$$

$$\text{Svar: } x'(t) = (t+1)e^t u(-t), x''(t) = (t+2)e^t u(-t) - d(t),$$

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = -d(t).$$

$$\begin{aligned} 4a. \quad s(t) &= \frac{1}{2} + \frac{24}{p^4} \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{n^4} e^{ipnt} = s(t) = \frac{1}{2} + \frac{24}{p^4} \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{n^4} e^{ipnt} + \frac{1}{n^4} e^{ipnt} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{24}{p^4} \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{n^4} e^{ipnt} + \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{(-n)^4} e^{-ipnt} = \frac{1}{2} + \frac{24}{p^4} \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{n^4} (e^{ipnt} + e^{-ipnt}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{48}{p^4} \sum_{n=1, \text{ udda}} \frac{1}{n^4} \cos pnt : \text{Svar} \end{aligned}$$

Alternativt kan man använda de generella omräkningssambanden (se formelbladet):

$$\text{I det här fallet är} \quad c_n = \frac{24}{p^4 n^4} \text{ då } n \neq 0 \text{ och } c_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{varav för } n \geq 0: \quad a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = \frac{48}{p^4 n^4}, \text{ då } n \geq 1 \text{ och } a_0 = 1$$

$$\text{och för } n \geq 1: \quad b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = 0,$$

$$\text{vilket insatt i} \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos pnt + b_n \sin pnt)$$

ger svaret ovan.

4b. $s(t)$ är en jämn funktion eftersom summans alla termer enligt 4a är jämna (cosinusserie).

För $-1 < t < 0$ gäller då

$$s(t) = s(-t) = (1-2t)(-t+1)^2 = (1-2t)(t+1)^2$$

$$\text{Svar: } s(t) = (1-2t)(t+1)^2 \text{ för } -1 < t < 0.$$

4c. $s(t)$ är 2-periodisk (eftersom $e^{ipn(t-2)} = e^{ipnt}$). Alltså

$$s(4/3) = s(4/3 - 2) = s(-2/3) = \frac{7}{27} \text{ enligt 4b}$$

$$\text{Svar: } \frac{7}{27}.$$

5a. Ekvationen är linjär och av första ordningen. På "normerad" form (dvs. med 1 som koefficient för y' -termen) skrivs den

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2} e^x \cos 3x. \dots (*)$$

$$\text{Integrerande faktor är därför } k(x) = \exp \left(\int \frac{2}{x} dx \right) = \exp(2 \ln x) = x^2 e^{-x}.$$

Multiplikeras differentialekvationen (*) med $k(x)$ så får man,

$$(x^2 e^{-x} y)' = \cos 3x,$$

varav efter integration

$$x^2 e^{-x} y = \frac{1}{3} \sin 3x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x}{x^2} \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$\text{Svar: } y = \frac{e^x}{x^2} \frac{\sin 3x}{3} + C$$

5b. Begynnelsevillkoret $y(-p/2) = 0$ ger att

$$\frac{\sin(-3p/2)}{3} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{1}{3}$$

och lösningen

$$y = \frac{e^x}{3x^2} (\sin 3x - 1).$$

Denna har som enda singularitet i $x = 0$. Det största intervall som innehåller startpunkten $x = -\pi/2$ och i vilken lösningen är giltig är alltså $x < 0$.

$$\text{Svar: } y = \frac{e^x (\sin 3x - 1)}{3x^2}, x < 0.$$

6a.

$$\text{fi} \quad \text{sinc}(100t) \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) = \begin{cases} 1/100, & \text{då } |f| < 50, \\ 0, & \text{då } |f| > 50. \end{cases}$$

100Hz-filtret silar alltså inte bort någonting, medan fouriertransformen för den med 30Hz-filtret behandlade signalen $\hat{x}(t)$ är

$$\hat{X}(f) = \begin{cases} 1/100, & \text{då } |f| < 30, \\ 0, & \text{då } |f| > 30. \end{cases}$$

Enligt Parsevals relation är energin hos signalen $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{100^2} \int_{-50}^{50} df = \frac{100}{100^2}$$

och hos den filtrerade signalen $\hat{x}(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(f)|^2 df = \int_{-30}^{30} \frac{1}{100^2} df = \frac{60}{100^2}.$$

Den andel av energin som går förlorad vid filtreringen är därför

$$\frac{\frac{100}{100^2} - \frac{60}{100^2}}{\frac{100}{100^2}} = 40\%.$$

Svar: 30Hz-filtret silar bort 40% av energin medan 100Hz-filtret inte silar bort något alls.

6b. För 30Hz-filtreringens del är signalens fouriertransform enl 6a. $\hat{X}(f) = \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{60}\right)$.

Återtransformering ger att $\hat{x}(t) = \frac{1}{100} \cdot 60 \text{sinc}(60t)$. 100Hz-filtret lämnar signalen orörd.

Svar: $0.6 \text{sinc}(60t)$ för 30Hz-filtrets del och $\text{sinc}(100t)$ för 100Hz-filtrets del.